FICHE 3.5 : COMMENT FACTORISER UNE EXPRESSION ?

Mise à jour : 12/03/12

Voici une fiche qui, à elle seule, justifierait l'existence de ce référentiel. La factorisation est un **outil mathématique** très important. Si tu ne maîtrises pas les techniques de factorisation, tu risques de rencontrer beaucoup d'ennuis par la suite…

Comme toujours, commençons par le début !

1. C'EST QUOI, FACTORISER ?

En fait, factoriser revient à **transformer une somme (ou une différence)** de termes **en un produit** de facteurs. C'est en fait l'opération « inverse » de la distributivité. Voyons cela sur un exemple concret :

Distribuer

Somme

$$2ab + 2ac$$
$$=$$
$$2a.(b+c)$$

Produit

Factoriser

Ainsi, distribuer consiste à faire « disparaître » des parenthèses tandis que factoriser a pour objectif d'en faire « apparaître ».

2. TECHNIQUES ET DÉMARCHE À SUIVRE

1ère étape : Mets en évidence

D'abord, tu dois **impérativement** commencer par **mettre en évidence** les facteurs qui sont communs à **tous** les termes. Ces facteurs peuvent être un nombre, une lettre (élevée éventuellement à une certaine puissance) voire même une paire de parenthèse *(il faut la considérer comme un « bloc » indissociable qui doit être mis entièrement ou pas du tout en évidence. Il est interdit de venir puiser une partie du contenu entre parenthèses pour faire notre opération).*

Voici quelques exemples :

- $3x + 3y = 3.(x + y)$
- $2ax - 3bx = x.(2a - 3b)$
- $\underset{3.5}{15}\, a^5\, b^2 + 5\, \underset{a^5.a^3}{a^8}\, b^2 = 5\, a^5\, b^2\, .\, (3 + a^3)$
- $a.(2x-1) + 4.(2x-1) = (2x-1).(a+4)$
- $2a.(x-3) + (x-3) = (x-3).(2a+1)$

Ce dernier exemple est source d'une erreur très fréquente car pour beaucoup d'étudiants, la réponse est (x – 3) (2a). Et le « + 1 » passe à la trappe ! Or, lorsqu'une expression contenue entre parenthèses est mise en évidence, il convient toujours de faire apparaître le facteur 1.

En effet : 2a (x - 3) + (x - 3) = 2a (x - 3) + 1 (x -3)
= (x - 3) (2a + 1)

Si la mise en évidence te pose problème, alors, il faut d'abord que tu télécharges la fiche consacrée à ce sujet.

<u>2^e étape : Compte le nombre de termes</u>

Après avoir éventuellement effectué la mise en évidence (il est possible qu'il n'y ait rien à faire), tu vas maintenant **<u>compter le nombre de termes que comporte l'expression littérale</u>** que tu souhaites factoriser.

Ceci afin de t'éclairer sur la bonne technique de factorisation.

- **Si l'expression à factoriser contient 2 termes :**

Dans ce cas, pose-toi les 4 questions suivantes :

- Est-ce une <u>différence</u>
  - **de 2 carrés** ? $\longrightarrow$ $a^2-b^2=(a-b).(a+b)$ (1)
  - **de 2 cubes** ? $\longrightarrow$ $a^3-b^3=(a-b).(a^2+ab+b^2)$ (2)
- Est-ce une <u>somme</u>
  - **de 2 carrés** ? $\longrightarrow$ Infactorisable dans $\mathbb{R}$!!! (3)
  - **de 2 cubes** ? $\longrightarrow$ $a^3+b^3=(a+b).(a^2-ab+b^2)$ (4)

Si tu réponds « **non** » à chacune des 4 questions, alors on est bien embêtés ! Il te reste cependant un dernier espoir… C'est que l'étape 3 intitulée **« En dernier recours »** puisse te venir en aide. Vas-y vite alors.

Voici une illustration de chacun des cas (le chiffre entre parenthèses t'indique si c'est la situation (1), la (2), la (3) ou la (4) de l'encadré ci-dessus)

$$9x^2-4 = \underbrace{(3x)^2}_{a}-\underbrace{(2)^2}_{b} \qquad (1)$$
$$= (3x-2).(3x+2)$$

$$(x+3)^2-16 = \underbrace{(x+3)^2}_{a}-\underbrace{(4)^2}_{b} \qquad (1)$$
$$= \left[(x+3)-4\right].\left[(x+3)+4\right]$$
$$= (x-1).(x+7)$$

$$x^4-16y^6 = \underbrace{(x^2)^2}_{a}-\underbrace{(4y^3)^2}_{b} \qquad (1)$$
$$= (x^2-4y^3).(x^2+4y^3)$$

$$8x^3-27y^3 = (\underset{a}{2x})^3-(\underset{b}{3y})^3 \qquad (2)$$

$$= \left(2x-3y\right).\left(4x^2+6xy+9y^2\right)$$

$$x^2+9 \qquad (3)$$

est impossible à factoriser ! On doit impérativement le laisser comme ça.

$$x^6+8y^3 = (\underset{a}{x^2})^3+(\underset{b}{2y})^3 \qquad (4)$$

$$= \left(x^2+2y\right).\left(x^4-2x^2y+4y^2\right)$$

Deux remarques importantes !

- De nouveau, une erreur fréquente est la confusion entre une somme et une différence de deux carrés. Cela peut se ressembler mais la factorisation est tout à fait différente.

  Ainsi (x^2 - 4) est assez sympa et accepte de se factoriser en (x – 2) (x + 2) tandis que (x^2 + 4) est casse-pieds et refuse de se factoriser !

- La deuxième remarque est plus une réflexion. Créer ce référentiel nous amène à nous poser beaucoup de questions. Faut-il faire de grandes synthèses très complètes ou les disséquer en plusieurs petites synthèses ? Faut-il être très complet ou ne traiter que des cas généraux ? Et pour chacune de ces questions, il faut trancher.

  Pour cette fiche consacrée à la factorisation, nous avons décidé de tendre vers une fiche traitant **tous les cas** que tu pourrais rencontrer. Mais nous tenons à te dire qu'en principe les situations (2) et (4) ne se voient qu'à partir de la 4^e secondaire. Il est donc plus que probable que tu ne doives jamais les utiliser (cette année en tous cas) dans les exercices proposés.

- **Si l'expression à factoriser contient 3 termes :**

Dans ce cas, pose-toi les 3 questions suivantes :

> - Est-ce un **carré parfait** de type **somme** ? $\longrightarrow$ $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$ (1)
> - Est-ce un **carré parfait** de type **différence** ? $\longrightarrow$ $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$ (2)
> - Est-ce un **polynôme du second degré** ? $\longrightarrow$ ax^2+bx+c (3)
>
> Si tu es dans la situation (3), le mieux est de télécharger la fiche « Comment factoriser un second degré » car il existe plusieurs méthodes suivant ton année scolaire.

Si tu réponds « **non** » à chacune des 3 questions, alors nous sommes de nouveau dans l'embarras ! Il te reste cependant un dernier espoir… C'est que l'étape 3 intitulée **« En dernier recours »** puisse te venir en aide. Vas-y vite alors.

Voici de nouveau une illustration de chacun des cas

(1) $9x^2+12xy+4y^2=(3x+2y)^2$

C'est effectivement un carré parfait de type somme. Pour le repérer, tu dois trouver deux termes qui sont des carrés puis vérifier que le troisième correspond bien au double produit. ***9x²*** *est bien le carré de* ***3x*** *et* ***4y²*** *est bien le carré de* ***2y****. Il ne reste plus qu'à espérer que le double produit coïncide. Or 2.(****3x****).(****2y****) = 12 x y. Nickel. Il reste juste à recopier le même signe que celui du double produit à l'intérieur de tes parenthèses.*

(2) $4x^2-20xy^2+25y^4=(2x-5y^2)^3$

Même raisonnement : ***4x²*** *est bien le carré de* ***2x*** *et* ***25y⁴*** *est bien le carré de* ***5y²****. Et le double produit coïncide de nouveau puisque 2.(****2x****).(****3y²****) = 12xy². Cette fois-ci, le signe du double produit est négatif, raison pour laquelle c'est bien un carré parfait de type différence.*

- **Si l'expression à factoriser contient 4 termes :**

Dans ce cas, pose-toi les 3 questions suivantes :

> - Est-ce un **cube parfait** de type **somme** ? $\longrightarrow a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3$ (1)
> - Est-ce un **cube parfait** de type **différence** ? $\longrightarrow a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=(a-b)^3$ (2)
> - Est-ce que la technique des **groupements** peut fonctionner ? (3)
>
>   Dans ce cas l'idée est de grouper les termes (en général 2 par 2) en « espérant » obtenir une factorisation. Ce n'est pas toujours évident de trouver quels termes grouper mais parfois, le miracle attendu se produit !

Si tu réponds « non » à chacune des 3 questions, alors, tu l'auras sans doute compris, fonce à l'étape 3 intitulée **« En dernier recours »** (et prie pour que ça marche ;-))

Voici de nouveau une illustration de chacun des cas

(1) $8x^3+36x^2+54x+27=(2x+3)^3$

C'est effectivement un cube parfait de type somme. Pour le repérer, tu dois trouver deux termes qui sont des cubes puis vérifier que les deux autres correspondent bien aux triples produits de l'un par le carré de l'autre. $8x^3$ est bien le cube de $2x$ et 27 est bien le cube de 3. Il ne reste plus qu'à espérer que les triples produits coïncident. Or $3.(2x)^2.(3) = 36x^2$ et $3.(2x).(3)^2 = 54x$. Nickel. C'est gagné !

(2) $64x^3-48x^2y^2+12xy^4-y^6=(4x-y^2)^2$

Même raisonnement : $64x^3$ est bien le cube de $4x$ et y^6 est bien le cube de y^2. Et les triples produits coïncident de nouveau puisque $3.(4x)^2.(y^2) = 48x^2y^2$ et $3.(4x).(y^2)^2 = 12xy^4$

(3) $3x^3-2x^2+9x-6 \quad = \quad (3x^3-2x^2)+(9x-6)$

$$= x^2(3x-2)+3.(3x-2)$$

$$= (3x-2).(x^2+3)$$

« Coup de bol » de retrouver la même parenthèse (3x-2) que l'on peut mettre en évidence et ainsi factoriser complètement notre polynôme de départ

- **Si l'expression à factoriser contient 5 termes ou plus :**

La seule méthode possible (dans le cadre d'un cours de secondaire) est la méthode des groupements. Si cela ne donne rien, il te reste… la fameuse 3e étape !

3e étape : Tente le dernier recours

Si tu te retrouves ici, c'est qu'au des méthodes précédentes n'a fonctionné. Il te reste alors une dernière chance, c'est de tenter la **méthode de Hörner**. Si cette méthode n'est pas applicable ou ne donne pas de résultats, sois rassuré, c'est que le polynôme n'est pas factorisable ou que celle-ci dépasse le cadre des cours du secondaire. Cette méthode n'est pas très compliquée, elle est très « recette de cuisine ». Pour plus de clarté, nous avons préféré créer également une fiche qui traitait uniquement de ce sujet *(fiche 3.1 : Méthode de Hornër)*