FICHE 2.1 : PLUS PETIT COMMUN MULTIPLE

Mise à jour : 06/03/12

P.P.C.M… Voilà une expression qui te rappelle inévitablement quelque chose ! Mais comme tous ces acronymes, on oublie parfois que chacune des lettres de l'expression « P.P.C.M. » est l'initiale d'un mot.

Le Plus Petit Commun Multiple (P.P.C.M.) de deux naturels est le plus petit naturel non nul, multiple de chacun d'eux.

Par exemple, le P.P.C.M de 10 et de 4 est 20. On notera que P.P.C.M. (10 ; 4) = 20

Parfois, le P.P.C.M de deux nombres est un des deux nombres lui-même. Dans ce cas, c'est toujours le plus grand des deux nombres. Ainsi P.P.C.M. (10 ; 20) = 20

Tu te dis peut-être que tu n'as pas besoin de méthode pour déterminer le P.P.C.M. de deux naturels. C'est vrai que, pour des petits naturels, le P.P.C.M. peut s'obtenir mentalement.

En effet, voici quelques exemples assez faciles

P.P.C.M. (2 ; 3) = 6

P.P.C.M. (3 ; 5) = 15

P.P.C.M. (7 ; 8) = 56

Mais pour déterminer le P.P.C.M. (72 ; 132) c'est moins immédiat !

Ou encore pour déterminer le P.P.C.M. (16 ; 56 ; 64), cela risque d'être folklorique si tu le fais au pifomètre ! Nous allons donc te présenter **deux méthodes** permettant de déterminer le P.P.C.M. de plusieurs naturels.

Des deux méthodes proposées, **c'est la première que nous te conseillons** car elle rapide et facile à retenir ! Que les nombres soient petits ou grands, que tu cherches le P.P.C.M. de deux ou plusieurs naturels, cette méthode est la plus efficace.

La deuxième méthode est plus intuitive : elle est d'ailleurs vue en primaire. Cependant, en secondaire, nous te la déconseillons car elle n'est réellement pratique qu'avec de très petits nombres.

PREMIÈRE MÉTHODE : LA FACTORISATION PREMIÈRE

On recherche simultanément tous les diviseurs premiers **communs ou non** aux nombres jusqu'à ce que le quotient obtenu, dans tous les cas, soit 1. Si la division n'est pas exacte, on recopie le dividende intermédiaire.

Le P.P.C.M. est alors le produit de ces diviseurs.

Soit à déterminer le P.P.C.M. de 6 et 8, c'est-à-dire P.P.C.M. (6 ; 8)

Naturel 1	Naturel 2	Diviseur	
6	**8**	**2**	Peux-tu diviser par 2 au moins un des deux naturels ? **OUI** Ici, les deux naturels sont divisibles par 2, donc, tu les divises tous les deux.
3	4	**2**	Peux-tu diviser par 2 au moins un des deux naturels ? **OUI** Ici, seulement 4 est divisible par 2, donc, tu recopies 3 et tu divises seulement 4 par 2.
3	2	**2**	Peux-tu diviser par 2 au moins un des deux naturels ? **OUI** Ici, seulement 2 est divisible par 2, donc, tu recopies 3 et tui divises seulement 2 par 2.
3	1	**3**	Peux-tu diviser par 2 au moins un des deux naturels ? NON Peux-tu diviser par 3 au moins un des deux naturels ? **OUI** Ici, seulement 3 est divisible par 3, donc, tu recopies 1 et tu divises seulement 3 par 3.
1	**1**		C'est fini car les deux naturels obtenus égalent 1

Le P.P.C.M. est donc 2.2.2.3 = 24

Soit à déterminer le P.P.C.M. de 72 et 132, c'est-à-dire P.P.C.M. (72 ; 132)

Naturel 1	**Naturel 2**	**Diviseur**	
72	**132**	**2**	Peux-tu diviser par 2 au moins un des deux naturels ? **OUI** Ici, les deux naturels sont divisibles par 2, donc, tu les divises tous les deux.
36	66	**2**	Peux-tu diviser par 2 au moins un des deux naturels ? **OUI** Ici, les deux naturels sont divisibles par 2, donc, tu les divises tous les deux.
18	33	**2**	Peux-tu diviser par 2 au moins un des deux naturels ? **OUI** Ici, seulement 18 est divisible par 2, donc, tu recopies 33 et tui divises seulement 18 par 2.
9	33	**3**	Peux-tu diviser par 2 au moins un des deux naturels ? **NON** Peux-tu diviser par 3 au moins un des deux naturels ? **OUI** Ici, les deux naturels sont divisibles par 3, donc, tu les divises tous les deux.
3	11	**3**	Peux-tu diviser par 3 au moins un des deux naturels ? **OUI** Ici, seulement 3 est divisible par 3, donc, tu recopies 11 et tu divises seulement 3 par 3.
1	11	**11**	Peux-tu diviser par 11 au moins un des deux naturels ? **OUI** Ici, seulement 11 est divisible par 11, donc, tu recopies 1 et tu divises seulement 11 par 11.
1	1		*C'est fini car les deux naturels obtenus égalent 1*

Le P.P.C.M. est donc 2.2.2.3.3.11 = 792

<u>Remarque</u> : n'oublie pas que la liste des candidats diviseurs est la liste des nombres premiers *(nombre naturel qui admet exactement deux diviseurs distincts entiers et positifs).* La liste des candidats essais est donc {2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53,…}. En général, connaître les 10 premiers « nombres premiers » te suffira amplement. (N'hésite pas à consulter la fiche sur les critères de divisibilité qui peut t'aider à repérer si un nombre est divisible ou pas par tel naturel…)

Un dernier exemple ? Soit à déterminer P.P.C.M. (16 ; 56 ; 64)

Naturel 1	Naturel 2	Naturel 3	Diviseur
16	**56**	**64**	2
8	28	32	2
4	14	16	2
2	7	8	2
1	7	4	2
1	7	2	2
1	7	1	7
1	1	1	

Le P.P.C.M. est donc 2.2.2.2.2.2.7 = 448

DEUXIÈME MÉTHODE : LA MÉTHODE DES MULTIPLES

On énumère les premiers multiples de chacun des nombres.
On repère, en les soulignant, les multiples communs aux nombres.
On repère, en le coloriant, le plus petit commun multiple non nul aux nombres.

Pour comparer les deux méthodes, reprenons les mêmes exemples.

- Soit à déterminer le P.P.C.M (6 ; 8)

mult 6 = { 0, 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60, …}
mult 8 = { 0, 8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64, … }

Pour cet exemple particulier, cette méthode des multiples peutsembler plus rapide que la méthode de la factorisation première. Voyons ce qu'il en est avec le deuxième exemple.

- Soit à déterminer le P.P.C.M (72 ; 132)

mult 72 = { 72, 144, 216, 288, 360, 432, 504, 576, 648, 720, 792, 864 … }
mult 132 = { 0, 132, 264, 396, 528, 660, 792, 924, 1056, …}

Ce n'est déjà plus aussi aisé d'énoncer les multiples de 72 et encore moins ceux de 132.

- Soit à déterminer le P.P.C.M. (16 ; 56 ; 64)

mult 16 = {16, 32, 48, 64, 80, 96, 112, 128, 144, 160, 176, 192, ….}
mult 56 = {56, 112, 224, 280, 336, 392, 448, 504, 560, 616, 672, 728…}
mult 64 = {64, 128, 192, 256, 320, 384, 448, 512, 576, 640, 704, 768, ….}

Après avoir écrit douze multiples pour chacun des naturels, le P.P.C.M. n'apparait toujours pas ! Il aurait fallut en écrire…. 28 avant d'aboutir à 448. Tu auras compris la lourdeur de cette méthode !

TROIS PROPRIÉTÉS À BIEN CONNAÎTRE…

Si deux nombres sont premiers entre eux, alors leur P.P.C.M. égale leur produit.

Exemple : 14 et 3 sont premiers entre eux donc P.P.C.M. (3 ; 14) = 42.

Si un nombre est un multiple d'un autre (ou des autres),
alors le P.P.C.M. est toujours le plus grand des nombres.

Exemple : 30 est un multiple de 5 donc P.P.C.M. (5 ; 30) = 30.
20 est un mulltiple de 4 et de 5 donc P.P.C.M. (4 ; 5 ; 20) = 20.

Le produit de deux naturels non nuls est égal au produit de leur P.G.C.D par leur P.P.C.M.

Exemple : Soient les deux naturels 15 et 9.

P.P.C.M. (15 ; 9) = 45.
P.G.C.D. (15 ; 9) = 3.
45 x 3 = 135

15 x 9 = 135