FICHE 1.6 : CRITÈRES DE DIVISIBILITÉ

Mise à jour : 12/12/11

Au travers de certaines simplifications de fractions, tu seras amené(e) à déterminer si un naturel est divisible ou non par un autre. Voici les 11 principaux critères de divisibilité à savoir appliquer :

Un naturel est divisible **par 2** si son dernier chiffre est 0, 2, 4, 6, 8.

Exemple : *28 476 est divisible par 2 car son dernier chiffre est « 6 ».*

Remarque : *pas grand-chose à dire, ce n'est sûrement pas à l'école secondaire que tu as appris ce critère, tu le connais sans doute depuis très longtemps.*

Un naturel est divisible **par 3** si la somme de ses chiffres est un multiple de 3

Exemple : ***768*** *est divisible par 3 car «**7** + **6** + **8** = 21 » et 21 est un multiple de 3.*

Remarque : *Tu peux appliquer ce critère autant de fois que tu le désires. Si tu prends par exemple un très grand nombre : 1 568 754. Est-ce un multiple de 3 ? En faisant la somme de tous les chiffres, tu trouves 36. Bien entendu, tu sais certainement que 36 est un multiple de 3 et donc tu peux t'arrêter là. Mais remarque quand même que 3 + 6 = 9. Et que 9 est un multiple de 3. Donc, comme annoncé, tu peux appliquer ce critère à volonté !*

Un naturel est divisible **par 4** si ses deux derniers chiffres forment un multiple de 4.

Exemple : *86 464 est divisible par 4 car « 64 » est un multiple de 4.*

Remarque : *En principe, tu connais ta table de « 4 » jusque 100, donc, tu ne devrais pas avoir grand mal à savoir si un nombre à 2 chiffres est divisible ou non par 4.*

Un naturel est divisible **par 5** si son dernier chiffre est 0 ou 5.

Exemple : *545 est divisible par 5 car son dernier chiffre est « 5 ».*

Remarque : *Comme pour 2, j'imagine que cette fiche ne t'apprend pas grand-chose en ce qui concerne la divisibilité par « 5 ».*

Un naturel est divisible **par 7** si la différence positive entre le double de la valeur du chiffre des unités et le nombre formé par les autres chiffres est un multiple de 7.

Exemples : *Bon, ce critère est un peu moins connu… il fait parfois peur mais il est pourtant très simple à appliquer. Prends par exemple* ***564****. Pour savoir s'il est divisible par 7, tu prends le chiffre des unités «* ***4*** *» et tu le doubles. Ce qui te donne «* ***8*** *». Ensuite, tu prends l'autre groupe de chiffres «* ***56*** *» et tu soustrais le «* ***8*** *» trouvé. La question est donc : est-ce que 56 – 8 (48) est un multiple de 7 ! NON, bien entendu ! Donc, 564 n'est pas divisible par 7. Tout simplement.*

Prenons un autre exemple : ***273*** *est-il divisible par 7 ? Tu prends le chiffre des unités «* ***3*** *» et tu le doubles, soit «* ***6*** *». Est-ce que* ***27*** *–* ***6*** *(21) est un multiple de 7 ? OUI ! 273 est donc bien un multiple de 7.*

Remarque : *Hormis les mathématiciens, très peu de gens connaissent ce critère. Tu peux toujours demander à tes parents s'ils savent comment déterminer si un nombre est divisible par 7 ! Tu les surprendras peut-être…*

Un naturel est divisible **par 8** si ses trois derniers chiffres forment un multiple de 8.

Exemple : *56 120 est divisible par 8 car « 120 » est un multiple de 8.*

Remarque : *Évidemment, ce critère implique de savoir si un nombre à 3 chiffres est un multiple de 8. Pas toujours évident pour des plus grands nombres comme par exemple 340. Tu peux alors combiner un autre « truc », si un naturel est divisible par 2, par 2 et encore par 2, alors… il est forcément divisible par 8. 340 divisé par 2 donne 170, qui divisé par 2 donne 85 mais 85 n'est pas divisible par 2. Donc 340, n'est pas divisible par 8.*

Un naturel est divisible **par 9** si la somme de ses chiffres est un multiple de 9.

Exemple : ***675*** *est divisible par 9 car «* ***6*** *+* ***7*** *+* ***5*** *= 18 » et 18 est un multiple de 9*

Remarque : *Comme pour le critère de divisibilité par 3, celui-ci est applicable autant de fois que nécessaire.*

.

Un naturel est divisible **par 10** si son dernier chiffre est 0

Exemple : 670 est divisible par 10 *car son dernier chiffre est « 0 ».*

Remarque : *Sans aucun doute le critère le plus connu au monde.*

Un naturel est divisible **par 11** si la différence positive entre la somme des valeurs des chiffres de rang impair et la somme des valeurs des chiffres de rang pair est un multiple de 11.

Exemples : *Tu auras très certainement remarqué une ressemblance avec le critère de divisibilité par 7. Confiance, comme toujours, cela parait déroutant et c'est finalement assez simple. Prenons 1628, il suffit que tu additionnes un chiffre sur deux en débutant par le chiffre des unités (**les chiffres verts : 6** + **8** = 14), que tu fasses la même chose avec les **rouges** : **1** + **2** = 3. Tu soustrais ensuite les résultats : 14 – 3 = 11. La différence est un multiple de 11 ! Le nombre de départ (1628) est donc bien un multiple de 11.*

*Prenons un plus grand nombre : 33 457 544. Additionne un chiffre sur deux (en partant toujours du chiffre des unités) : **4** + **5** + **5** + **3** = 17 et **4** + **7** + **4** + **3** = 18. La différence (en valeur absolue) est donc 1.Or 1 n'est pas un multiple de 11.*

Remarque : *Comme pour 7, ce critère n'est pas très connu… Il est pourtant à l'origine de nombreux tours de magie.*

Un naturel est divisible **par 25** si ses deux derniers chiffres forment un multiple de 25.

Exemple : *8 175 est divisible par 25 car « 75 » est un multiple de 25.*

Remarque : *Très facile d'application puisque les seuls multiples de « 25 » à deux chiffres sont 25, 50,75 et (1)00.*

Un naturel est divisible **par 125** si ses trois derniers chiffres forment un multiple de 125.

Exemple : *57 625 est divisible par 125 car « 625 » est un multiple de 125.*

Remarque : *A peine plus difficile que le cas précédent, il suffit que tu connaisses les huit premiers multiples de 125 qui sont 125, 250, 375, 500, 625, 750, 875 et (1)000*

PETIT EXTRA : MAGIE et CRITÈRE DE DIVISIBILITÉ

Allez, ce n'est pas l'objectif de ces fiches de faire de l'« extra-scolaire » (même si bien entendu, c'est aussi et toujours très intéressant) mais quand le sujet s'y prête si bien… on ne va pas s'en priver. Il est peut-être préférable de te munir d'un papier et d'un crayon pour le donner à ton ami.

(1) Demande à cet ami de choisir un nombre au hasard.
(2) Ensuite, dis-lui de calculer la somme de tous les chiffres de ce nombre.
(3) Maintenant, il doit retirer cette somme du nombre choisi.
(4) Enfin, fais-lui barrer un chiffre quelconque (sauf zéro).
(5) Demande-lui quel est ce nouveau nombre.
(6) Tu peux alors lui dire quel chiffre il a barré !

L'explication de ce tour est très simple. Prenons comme nombre de départ : 554 672. La somme des chiffres de ce nombre est 5 + 5 + 4 + 6 + 7 + 2 (29). Si on soustrait 29 de 554 672, tu obtiens 554 643. Et 554 643 est un multiple de 9. La preuve : 5 + 5 + 4 + 6 + 4 + 3 = 27. Donc, d'après le critère de divisibilité, c'est bien un multiple de 9.

En fait, le nombre obtenu à la fin de l'étape (3) sera toujours un multiple de 9.
La démonstration n'est pas très compliquée. Observe.

554 672

peut s'écrire 2 + 7.10 + 6. 100 + 4. 1 000 + 5. 10 000 + 5. 100 000
ou encore **2** + **7**.(**9** + **1**) + **6**. (**99** + **1**) + 4. (999 + **1**) + 5. (9999 + **1**) + 5. (99999 + **1**)
ou même **7.9** + **6.99** + 4. 999 + 5. 9 999 + 5. 99 999 + (**2 + 7 + 6 + 4 + 5 + 5**)

Donc 554 672 – (2 + 7 + 6 + 4 + 5 + 5) = 7.9 + 6.99 + 4. 999 + 5. 9 999 + 5. 99 999
= 9 (7 + 6.11 + 4.111 + 5. 1 111 + 5. 11 111)

ce qui donne bien un nombre divisible par 9.

À l'étape (4), ton ami barre un nombre. Supposons le 6. Quand tu lui demandes le nouveau nombre, il répond alors 55 443. Mais toi, tu sais que ce nombre, avant qu'il ne barre le moindre chiffre, était divisible par 9. Donc, il suffit d'additionner tous les chiffres et de trouver quel est le chiffre manquant pour arriver à 9 !!! Dans notre cas : 5 + 5 + 4 + 4 + 3 = 21. Le multiple de 9 suivant est donc 27. Il manque donc le 6. Bravo !

Si tu obtiens directement un multiple de 9, c'est qu'alors le nombre que ton ami a barré était soit 0, soit 9. Et comme tu as interdit de barrer un zéro… Cela ne peut être que 9. Élémentaire, mon cher Watson ;-)