FICHE 1.5 : À PROPOS DES NOMBRES

Mise à jour : 16/12/2011

Des nombres, tu en rencontres tous les jours… à toutes les sauces ! Il est peut-être temps de remettre un peu d'ordre dans tout cela !

1. NOMBRES NATURELS

Les premiers nombres que tu rencontres sont ceux qui ont été utilisés tout au début de l'histoire de l'Humanité. Ce sont les nombres qui servent à compter. Il s'agit donc des nombres 1, 2, 3, … 12, … 18…. Bref, les nombres naturels permettent de dénombrer et de répondre à la question « Combien d'objets y a-t-il dans mon sac ? »

Ce n'est que par après (bien plus tard) que le nombre « zéro » est apparu et qu'on l'a ajouté à l'ensemble des nombres naturels. Les nombres naturels sont bien entendus en nombre infini.

Les nombres naturels sont donc ceux de l'ensemble {0, 1, 2, 3, 4, 5….}

On les désigne par l'ensemble $\mathbb{N}$

2. NOMBRES ENTIERS (RELATIFS)

Ensuite, on s'est rendu compte que les nombre naturels ne pouvaient pas tout expliquer. C'est à ce moment que les nombres entiers négatifs sont apparus.

L'ensemble des nombres entiers comprend bien entendu l'ensemble des nombres naturels {0, 1, 2, 3, … } mais aussi l'ensemble {-1, -2, -3, -4, ….}. On les appelle parfois les entiers relatifs *(mais c'est plus en France que tu rencontreras cette appellation).*

Les nombres entiers sont donc ceux de l'ensemble {… -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5….}

On les désigne par l'ensemble $\mathbb{Z}$

3. NOMBRES DÉCIMAUX

L'ensemble des nombres décimaux comprend l'ensemble des nombres entiers mais aussi l'ensemble des nombres possédant un développement décimal limité, c'est-à-dire que le nombre de chiffres après la virgule est fini. Par exemple (0,37) ou (– 12,65478).

Contrairement aux nombres entiers, je ne peux pas t'énumérer un par un, par ordre croissant, la liste des nombres décimaux puisqu'entre 0.1 et 0.2, il existe 0.11. De même entre 0.11 et 0.12, il existe 0.111. C'est une première différence avec les nombres entiers. *(Mais pourtant un mathématicien génial a trouvé une manière d'énumérer tous les nombres décimaux !)*

Puisqu'un nombre décimal possède un nombre fini de chiffres après la virgule, <u>il peut donc toujours d'écrire sous forme d'une fraction.</u>

Par exemple : 0,45784 peut s'écrire $\frac{45784}{100000}$

> Les <u>nombres décimaux</u> sont donc des nombres avec une virgule ou sans.
> S'il y a une virgule, alors il y a un nombre <u>limité</u> de chiffres après la virgule.
>
> On les désigne par l'ensemble $\mathbb{D}$.

4. NOMBRES RATIONNELS

Un nombre rationnel est un nombre qui peut s'écrire sous forme d'un rapport de deux entiers. Bref, tous les nombres qui peuvent s'écrire <u>sous forme d'une fraction</u>.

Bien entendu, on y retrouve tous les nombres naturels *(puisque 7 peut s'écrire 7/1)*, tous les nombres entiers, tous les nombres décimaux *(puisqu'ils peuvent tous s'écrire sous forme de fractions)* mais aussi bien d'autres nombres : 0.6666… ; 1/3 ; 6/7 ; ….

Cet ensemble de nombres est déjà un peu plus complexe que les trois premiers. En effet, tous les nombres jusqu'aux nombres décimaux sont des nombres « finis » c'est-à-dire tout s'implement qu'ils ont une « fin ». Dans les nombres rationnels, tu vas trouver des nombres finis (comme 0.26 ; - 0.1354) mais aussi des nombres illimités (comme 0,333333…. puisque ce nombre vaut 1/3).

<u>**Une remarque importante cependant**</u> : tous les nombres illimités que tu rencontreras seront alors des nombres où il a une répétition de chiffres tout de suite ou à un moment donné. On dit que ces nombres sont des <u>**nombres périodiques**</u>.

Exemples : 1/7 = 0.142857142857142857… (la répétition est tout de suite)
631/1500 = 0.420666666666… (la répétition se produit à un moment donné)

Les nombres rationnels sont donc des nombres qui peuvent s'écrire sous forme d'une fraction où le numérateur et le dénominateur sont deux entiers. (Évidemment, le dénominateur doit être différent de zéro)

Ils peuvent être limités ou illimités (mais alors, ils font partie des illimités périodiques)

On les désigne par l'ensemble $\mathbb{Q}$.

5. NOMBRES RÉELS

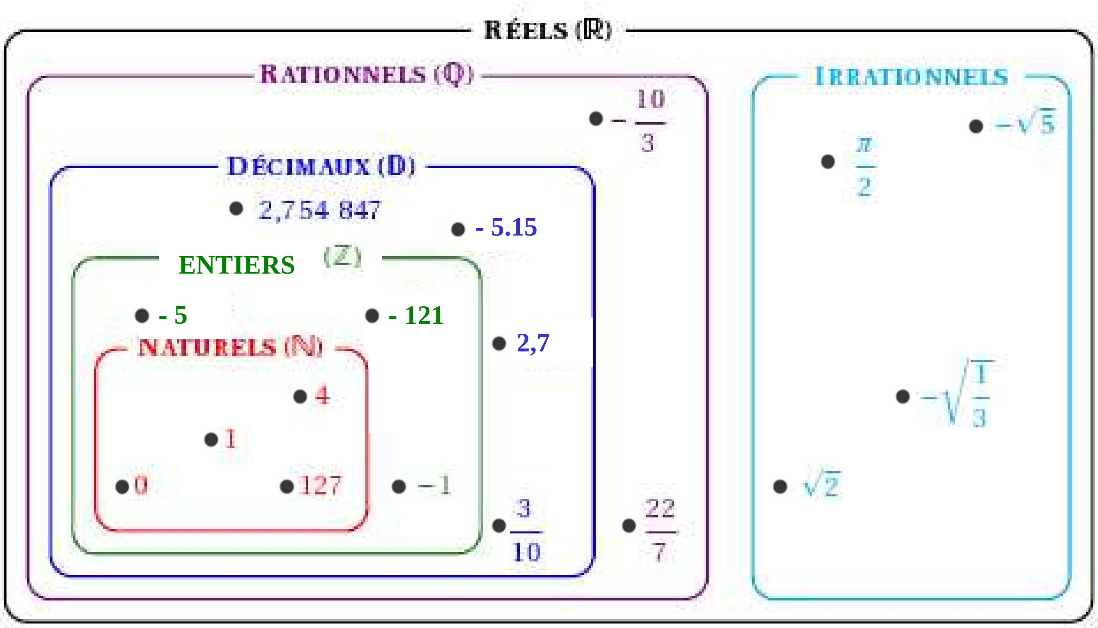
Là, nous arrivons au sommet de ce que « la plupart des gens » connaissent. Les nombres réels reprennent donc tous les nombres que tu as pu rencontrer jusqu'à maintentant. Les naturels, les entiers, les rationnels …. et les autres. Oui mais quels autres ? Eh bien tous les nombres illimités non périodiques ! D'ailleurs ceux-là, on ne les appelle pas « illimités non périodiques » mais tout simplement « nombres irrationnels ».

Tu crois que tu n'en connais pas ? Mais bien sûr que si : le plus célèbre est π (le rapport de la longueur d'un cercle à son diamètre) qui vaut 3.14159265358979323846…. Aucune répétition dans la séquence des chiffres qui le composent. Il y en a bien d'autres évidemment : $\sqrt{2}$, le nombre e (qu'on étudie seulement en rhéto),….

Quand tu choisis un nombre réel, il s'agit donc soit d'un nombre rationnel (qui peut donc être naturel, entier, décimal ou … un rationnel non décimal) ou d'un nombre irrationnel.

6. EN BREF…

De manière à visualier toutes ces catégories de nombres, voici un diagramme récapitulatif.



7. NOMBRES COMPLEXES

Eh oui, au-delà des nombres réels, il existe encore bien d'autres catégories de nombres. Difficile à imaginer ? Je comprends… Les nombres complexes sont étudiés en rhéto (option math6). Ce sont des nombres qui élevés au carré peuvent… être négatifs ! Hallucinant ? Et oui… les mathématiques et son histoire sont parfois surprenantes. Mais ce thème fait l'objet d'une fiche à part entière tant il y a à dire de choses…

Et au-delà des nombres complexes ? Il y en a encore, encore, encore…. Mais là, cela déborde très largement du cadre du secondaire. Peut-être par la suite si l'aventure mathématique te tente !

8. UN PEU D'HISTOIRE

Maintenant que tu sais presque tout sur l'univers des nombres, pour t'aider à mieux retenir le nom de ces ensembles, il peut être intéressant de revenir à l'étymologie du mot.

$\mathbb{N}$: l'ensemble des naturels est désigné par la lettre $\mathbb{N}$. Pourquoi « naturel » ? Parce que ces nombres viennent naturellement quand on commence à compter ! Et en latin, naturel, s'écrit « *naturale* ». Par chance, l'initiale est donc la même.

$\mathbb{Z}$: la blague circule toujours : on l' a noté ainsi parce que c'est l'ensemble des nombres… z'entiers ;-). Plus sérieusement, les mathématiciens n'ont pas tous été français (encore moins belges). $\mathbb{Z}$ est l'initiale de « zahlen » en allemand, ce qui signifie « nombre ».

$\mathbb{D}$:là, c'est facile et logique. $\mathbb{D}$ car c'est l'ensemble des nombres Décimaux.

$\mathbb{Q}$: très simple si on se souvient de la définition : un nombre qui peut s'écrire sous forme d'un Quotient de deux entiers.

$\mathbb{R}$: l'histoire n'est pas toujours linéaire. La notation de « nombre réel » n'a vraiment été effective que lorsque les nombres complexes sont nés. Les nombres complexes s'appellent aussi des nombres imaginaires (quand tu les étudieras, tu comprendras pourquoi). Par opposition au terme « imaginaire », on a dit que les autres nombres étaient donc des vrais, c'est-à-dire des nombres « réels ».

$\mathbb{C}$: il s'agit de l'ensemble des nombres Complexes (ou encore nombres imaginaires)

9. QUELQUES NOTATIONS

Quels que soient les ensembles étudiés, il existe des notations communes.

$\mathbb{Q}^+$ désignera l'ensemble des nombres rationnels positifs ou nuls.
$\mathbb{R}^+$ désignera l'ensemble des nombres réels positifs ou nuls.
$\mathbb{Z}^-$ désignera l'ensemble des nombres entiers négatifs ou nuls.
$\mathbb{Q}^-$ désignera l'ensemble des nombres rationnels négatifs ou nuls.
$\mathbb{R}^-$ désignera l'ensemble des nombres réels négatifs ou nuls.

Remarque : ce n'est pas un oubli, mais on ne parlera

- Jamais de $\mathbb{N}^+$ puisque les naturels sont d'office positifs.
- Que très rarement de $\mathbb{Z}^+$ puisque les nombres entiers positifs s'appellent des nombres … naturels !

$\mathbb{N}_0$ désignera l'ensemble des nombres naturels excepté « zéro ».

Remarque :

- *On rencontre parfois* $\mathbb{N}^*$ *mais c'est beaucoup plus rare, cela signifie la même chose que* $\mathbb{N}_0$.
- *Cette notation est valable pour tous les ensembles :* $\mathbb{R}_0$, $\mathbb{Q}_0$….

$\mathbb{Z} \setminus \{1\}$ désignera l'ensemble de tous les nombres entiers sauf 1.

Remarque :

- *Evidemment, tu peux remplacer le « 1 » par n'importe quel autre nombre. Cette notation s'utilise aussi pour tous les ensembles.*