VIII. Applications de la dérivée Modélisation

1. Problèmes d'optimisation.

1.1 Exemple introductif.

On fabrique une boîte sans couvercle avec un morceau de carton carré de côté a. Pour cela, on enlève des carrés égaux aux 4 coins et on relève ensuite le carton verticalement pour fermer les côtés. Déterminer la longueur du côté des carrés à enlever si on veut obtenir la boîte du plus grand volume possible.

Cas particulier.
Envisageons d'abord le cas particulier où le côté du carré mesure 10 cm.
Exprimons le volume de la boîte ainsi formée en fonction de la longueur des côtés des carrés ôtés.

$$V = (10 - 2x)^2 x$$

Comme $0 \leq 2x \leq 10$, le domaine de définition de V est limité à $0 \leq x \leq 5$
$V(0) = V(5) = 0$, ce qui correspond bien à la situation concrète : le volume est nul lorsque les bords relevés sont de hauteur nulle ou lorsqu'ils sont de hauteur 5 car alors, l'aire de la base est nulle.
En calculant la dérivée première de V, nous obtenons :

$$V'(x) = 2(10 - 2x)(-2)x + (10 - 2x)^2 = (10 - 2x)(-4x + 10 - 2x) = (10 - 2x)(10 - 6x)$$ qui est une fonction du second degré qui s'annule en $x = 5$ et en $x = 5/3$
En étudiant le signe de V' dans le domaine de définition de V, on peut en déduire la variation du volume :

x	0		5/3		5
$V'(x)$	+	+	0	-	0
$V(x)$	↗	↗	max	↘	

$(5/3, V(5/3))$ est donc bien un maximum de V. Il convient donc de plier des bords de 5/3 de cm pour maximiser le volume de la boite. Le volume vaut alors : $(10 - 10/3) . 5/3 = 2000/27\ cm^3$

En général :
Reprenons ce problème pour un carton de côté quelconque a
alors $V = (a - 2x)^2 x$ avec $0 \leq x \leq a/2$
$V'(x) = (a - 2x)(a - 6x)$ qui est également une fonction du second degré s'annulant en $x = a/6$ et en $x = a/2$
Nous étudions également le signe de la dérivée afin d'en déduire les variations de V.

x	0		a/6		a/2
$V'(x)$	+	+	0	-	0
$V(x)$	↗	↗	max	↘	

Et nous trouvons alors un volume maximum lorsque l'on relève les bords d'une hauteur égale à a/6. Le volume vaut alors $2a^3/27$
Remarquons que si le cas particulier pouvait être résolu en utilisant les possibilités de la calculatrice, le cas général ne peut l'être que par le calcul de la dérivée. C'est ainsi que nous voyons tout l'intérêt des calculs de dérivées.

1.2 Exercices.

1. Même problème que dans l'exemple, mais pour une feuille de carton rectangulaire dont les dimensions sont 42 cm et 32 cm. Et généraliser pour une feuille de dimensions a et b

   sol : x = 6 cm b) $\dfrac{a + b - \sqrt{a^2 + b^2 - ab}}{6}$

2. En pliant à angle droit les deux bords d'une bande de zinc de 32 cm de large sur 5m de long, on forme une gouttière. Quelle hauteur doivent avoir les bords pour que la capacité de la gouttière soit maximale ?

   sol : x = 8 cm

3. On veut fabriquer des boîtes de conserve de forme cylindrique ayant un volume fixé. Quelles doivent être les dimensions de la boîte pour qu'on utilise le moins de métal possible. sol : $r = \sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$ $h = \sqrt[3]{\dfrac{4V}{\pi}} = 2r$

4. On veut fabriquer un poêlon (cylindre creux sans couvercle) à l'aide d'une feuille de métal d'aire donnée A (considérer d'abord A = 60 cm^2)
   a) Exprimer la hauteur et le volume du poêlon en fonction de son rayon.
   b) Quelles sont les dimensions de ce poêlon pour que son volume soit maximum ?
   c) Quel est ce volume maximum ?

   sol : a) $h = \dfrac{A - \pi r^2}{2\pi r}$ cm $V = \dfrac{1}{2}(Ar - \pi r^3) cm^3$ b) $r = \sqrt{\dfrac{A}{3\pi}}$ cm $h = r$ $V_{max} = \pi\left(\sqrt{\dfrac{A}{3\pi}}\right)^3 cm^3$

5. On doit fabriquer un conteneur en métal de forme cylindrique, sans couvercle et d'une capacité de 24π cm^3. Le matériau employé pour le fond coûte 0,15 € par cm^2 et celui utilisé pour la partie courbe, 0,05 € par cm^2. Si la fabrication ne donne lieu à aucun déchet, quelles doivent être les dimensions du cylindre pour qu'il coûte le moins possible ? sol : r = 2 cm h = 6 cm

6. On considère un rectangle inscrit dans un triangle isocèle de base b et de hauteur h (considérer d'abord b = 3 et h = 6). Déterminer la longueur du côté du rectangle parallèle à la base qui maximise l'aire A du rectangle.
   sol : x =b/2

7. On considère un cylindre circulaire droit inscrit dans un cône droit de 12 cm de haut et de rayon de base 4 cm.
   a) Déterminer les dimensions à donner à ce cylindre pour que son volume soit maximum
   b) Calculer ce maximum. sol : r = 8/3 cm h = 4 cm $V = \dfrac{256\pi}{9} cm^3$

8. Reprendre le problème précédent pour une hauteur H et un rayon R

   sol : r = 2R/3 $V = \dfrac{4\pi R^2 H}{27}$

9. Deux rues se coupent à angle droit en un point P. L'une a la direction nord-sud, l'autre la direction est-ouest. Une voiture venant de l'ouest passe en P à 10 h à la vitesse constante de 20 km/h. Au même instant, une autre voiture, située à 2 km au nord du croisement, se dirige vers le sud à 50 km/h. A quel moment ces deux voitures sont-elles les plus proches l'une de l'autre (à vol d'oiseau) et quelle est cette distance minimale ?

   sol : t = 1/29 heure $d_{min} = \dfrac{4}{\sqrt{29}} \cong 0.7428$ km

10. Le passager d'une barque située à 2 km du point le plus proche de la rive désire atteindre le plus rapidement possible la maison située au bord de l'eau à 6 km en aval. Etant donné que cette personne se déplace à 3 km/h à la rame et à 5 km/h à pied, en quel point de la rive doit-il accoster pour arriver au plus vite ?
    sol : si x = dist. entre le point du bord le plus proche de la barque et le point où elle doit accoster : x =3/2 km

11. La résistance d'une poutre de section rectangulaire est directement proportionnelle à sa largeur et au carré de sa hauteur. Quelles sont les dimensions de la poutre de résistance maximum que l'on peut extraire d'un tronc/rondin de bois dont le diamètre d (ex : considérer d'abord un diamètre de 20 cm)
    sol : si l et h = largeur et hauteur de la poutre et d = diamètre du rondin
    a) si d = 20 : $l = \dfrac{20}{\sqrt{3}}$ cm et $h = 20\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ cm b) en général : $l = \dfrac{d}{\sqrt{3}}$ et $h = \sqrt{\dfrac{2}{3}}\, d$

12. Déterminer la hauteur du cône de volume maximum qui peut être inscrit dans une sphère de rayon R
    .sol : 4R/3

13. On veut fabriquer une boîte rectangulaire à base carrée, sans couvercle. Quel est le volume de la plus grande boîte que l'on puisse obtenir avec 12 m^2 de planches ? sol. : 4 m^3

14. On veut construire un réservoir à base carrée, ouvert vers le haut et contenant 125 m^3. Le prix s'élève à 0,25 € le mètre carré pour le fond et à 0,5 € le mètre carré pour les côtés. Quelles doivent être les dimensions

du réservoir pour que la dépense soit minimale ?

sol. :$c = \sqrt[3]{500}$ m $\cong$ 7,93 m et $h = \dfrac{\sqrt[3]{500}}{4} \cong$ 1,98 m

15. Un parterre de fleurs, rectangulaire, a une surface de 100 m^2. Une allée en fait le tour et sa largeur est égale à 0,75 m le long des grands côtés du parterre et 1,5 m le long des petits côtés. Si la surface totale (parterre et allée) est minimale, quelles sont les dimensions du parterre ? sol. : $5\sqrt{2}$ m et $10\sqrt{2}$ m

16. Un terrain rectangulaire de surface donnée longe une rivière. On veut l'enclore mais la clôture est inutile le long de la rivière. Montrer que la dépense pour la clôture sera minimale si la longueur du terrain est double de sa largeur.

17. Une fenêtre se compose d'un rectangle surmonté d'un triangle équilatéral; son périmètre est égal à 5 m. Quelles sont ses dimensions, sachant qu'elle donne un éclairement maximal ?
sol. : dimensions du rectangle : 1,17 m de large et 0,743 m de haut.

18. Déterminer les dimensions du cylindre du plus grand volume que l'on puisse découper dans une sphère de rayon R ? sol. :$h = \dfrac{2R}{\sqrt{3}}$ et $r = R\sqrt{\dfrac{2}{3}}$

19. La génératrice d'un cône de révolution a pour longueur a. Quelle doit être la hauteur de ce cône pour que son volume soit maximal ? sol. : $\dfrac{a}{\sqrt{3}}$

20. **Une burette est constituée par un cylindre surmonté d'un cône dont la hauteur est égale aux 2/3 du diamètre de base. Montrer que, pour une capacité donnée, la construction exige un minimum de matière lorsque la hauteur du cylindre est égale à celle du cône.

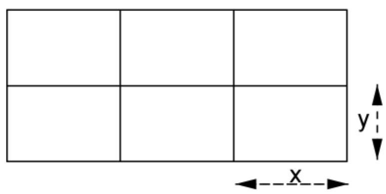
21. Quelles sont les dimensions d'un rectangle d'aire maximale qui peut être inscrit dans un segment AOA' de la parabole d'équation $y = \dfrac{x^2}{4}$ si A et A' ont pour abscisses respectives a et -a sol : $l = \dfrac{2a}{\sqrt{3}}$ et $h = \dfrac{a^2}{6}$

22. On donne sur l'axe de la parabole $y = \dfrac{x^2}{4}$ le point P(0,6). Quelles sont les coordonnées des points de la parabole les plus proches de P? sol : (4, 4) et (-4, 4)

23. En coupant un fil de fer de 1,5 m en deux morceaux, on souhaite former une circonférence et un triangle équilatéral. A quel endroit faut-il couper le fil pour que le total des aires de ces deux figures soit minimal ? Maximal ?
sol : si x = longueur destinée au cercle : x = 56,51 cm pour S_{min} et x = 1,5 (on ne coupe pas le fil) pour S_{max}

24. On dispose de 250 m de clôture grillagée pour construire 6 cages de démonstration pour un zoo, assemblées selon le schéma suivant. Quelles dimensions donner à ces cages de manière à ce que l'espace disponible pour les animaux soit le plus grand possible ?

sol. : x = 125/9 m et y = 125/8 m



25. On désire construire une tente en forme de pyramide à base carrée. Un poteau servira de support au centre de la tente. A désigne le nombre de m^2 de toile disponible pour la fabrication des 4 faces
a) Exprimer le volume V de la tente en fonction de la longueur du côté de la base.
b) Déterminer la longueur de la base de la tente qui rend le volume maximum ainsi que la hauteur du poteau.

sol : x = longueur du côté de la base : a) $V = \dfrac{x\sqrt{A^2 - x^4}}{6}$ b) $x = \sqrt[4]{\dfrac{A^2}{3}}$ $h = \sqrt[4]{\dfrac{A^2}{12}}$

26. a) Quelles sont les dimensions à donner à un rectangle d'aire égale à 10 m^2 pour que son périmètre soit minimum ? sol : $x = \sqrt{10}$ m = y
b) Reprendre le problème pour un rectangle d'aire A sol : $x = \sqrt{A}$ m= y
c) Que conclure quant à sa forme ?

27. a) Quelles sont les dimensions à donner à un rectangle de périmètre égal à 10 m pour que son aire soit maximale ? sol : $x = 2{,}5$ m $= y$

b) Reprendre le problème pour un rectangle de périmètre p sol : $x = \frac{p}{4} = y$

c) Que conclure quant à sa forme ?

28. Quelles sont les dimensions d'un triangle rectangle de surface égale à 50 cm^2 qui possède la plus petite hypoténuse ? sol : $x = 10$ cm $= y$

29. On considère un triangle dont 1 sommet coïncide avec le centre d'un cercle de rayon r et dont les deux autres sommets appartiennent au cercle.
a) Calculer l'aire de ce triangle en fonction de la hauteur issue du centre du cercle.
b) Quelle valeur doit avoir cette hauteur pour que l'aire soit maximale ?
c) Que vaut le maximum ?

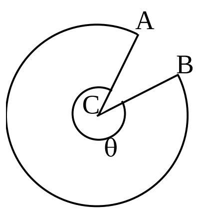
sol : a) $A = h\sqrt{r^2 - h^2}$ b) $h = \frac{r}{\sqrt{2}}$ c) $A = \frac{r^2}{2}$

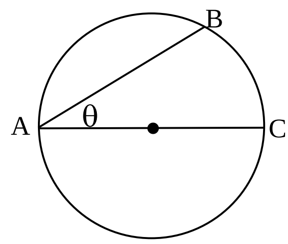
30. Une clôture de 2m de haut longe un immeuble à 1 m de celle-ci sur toute sa longueur. Si l'on veut appuyer une échelle sur le mur de cet immeuble par dessus la clôture, de quelle longueur l'échelle doit-elle être au minimum ? sol : $l \cong 4{,}16$ m

31. On forme un gobelet conique en coupant un secteur d'un carton circulaire de rayon R et en joignant les bords CA et CB.

Déterminer la valeur l'angle $\theta = B\hat{C}A$ qui permet d'obtenir une capacité maximale.

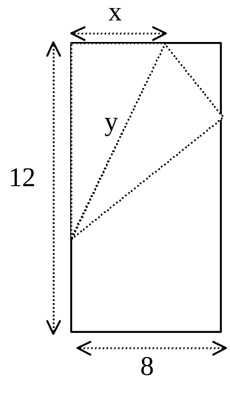
sol : $\theta = 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}$





32. Une dame part du point A situé au bord d'un lac circulaire de 2km de rayon et veut atteindre le point C diamétralement opposé. Elle peut aller à pied à la vitesse de 4 km/h ou en barque à la vitesse de 2km/h. Etudier les variations de son temps de parcours en fonction de l'angle θ formé par la direction de sa barque et le diamètre. Dans quel cas, ce temps est-il minimum ? Et maximum ?

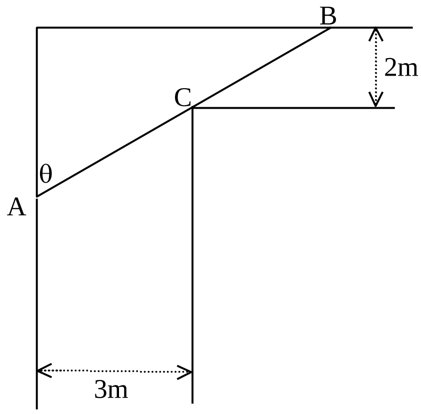
sol : a) lorsqu'elle parcourt tout à pied. b) $\theta = \frac{\pi}{6}$



33. On plie une feuille de papier de 8 cm sur 12 en amenant le coin supérieur gauche sur le côté droit, comme le montre la figure. Quel est le pliage qui rend le pli le plus court possible ? C'est à dire : comment choisir x pour minimiser y ?

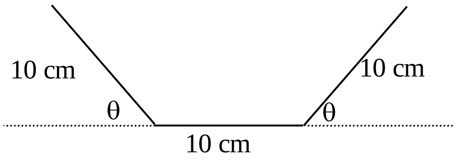
sol : $x = 6$ cm et donc $y \cong 10.39$ cm

34. Un tuyau en acier est transporté dans un corridor de 3 m de large. Au bout, le corridor tourne à angle droit dans un autre plus étroit, de 2 m de large. Quelle est la longueur du plus long tuyau qui puisse passer horizontalement par ce couloir ? (indication : exprimer |AB| en fonction de θ)



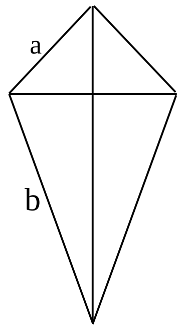
sol : $\theta = \arctan \sqrt[3]{\frac{3}{2}}$ l = 7,023 m

35. Une gouttière est obtenue en repliant de chaque côté un tiers d'une longue feuille de zinc de 30 cm de large.
Comment faut-il choisir θ pour que la gouttière puisse retenir la plus grande quantité d'eau possible ?



sol : $\theta = \frac{\pi}{3}$

36. La structure d'un cerf-volant est faite de 6 pièces de bois. les quatre baguettes extérieures ont les longueurs indiquées sur la figure. Comment faut-il choisir l'angle θ de manière à rendre l'aire du cerf-volant la plus grande possible ?
Quelles sont alors les dimensions des diagonales ?



sol : $\theta = \frac{\pi}{2}$ $d_1 = \sqrt{a^2 + b^2}$ $d_2 = \frac{2ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

37. On considère un triangle dont 1 sommet coïncide avec le centre d'un cercle de rayon r et dont les deux autres sommets appartiennent au cercle.
a) Calculer l'aire de ce triangle en fonction de l'angle au centre θ
b) Quelle valeur doit avoir θ pour que l'aire soit maximale ?
c) Que vaut le maximum ?

sol : a) $A = \frac{r^2 \sin\theta}{2}$ b) $\theta = \frac{\pi}{2}$ c) $s_{max} = \frac{r^2}{2}$

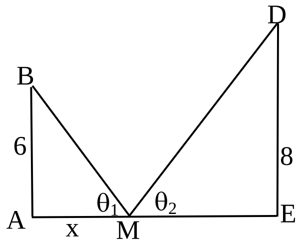
38. **Un triangle isocèle est inscrit dans un cercle de rayon r
a) Exprimer l'aire de ce triangle en fonction de l'angle opposé à la base.
b) Pour quelle valeur de cet angle, l'aire est-elle maximale et à quel triangle cette valeur correspond-elle ?
c) Calculer ce maximum.

sol : a) $A = r^2(\frac{1}{2}\sin 2\theta + \sin\theta)$ b) x = 60° c) max = $\frac{3\sqrt{3}}{4} r^2$

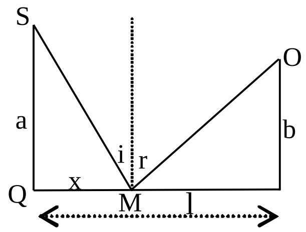
39. **Un triangle isocèle est inscrit dans un cercle de rayon r
a) Calculer le périmètre de ce triangle en fonction de l'angle opposé à la base.
b) Pour quelle valeur de cet angle, le périmètre est-il maximum ?
c) Calculer ce maximum. ?

sol : a) $p = 2r(\sin\theta + 2\cos\frac{\theta}{2})$ b) 60° c) $3\sqrt{3}\,r$

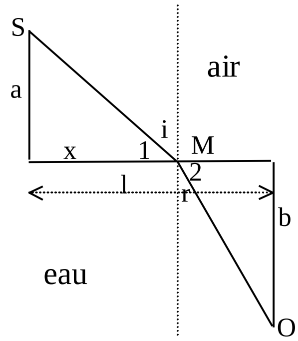
40. Deux mâts de 6 et 8 m de haut sont plantés verticalement dans le sol à 10 m l'un de l'autre. Quelle est la longueur du câble le plus court qui puisse joindre les extrémités des mâts tout en touchant le sol quelque part entre les mâts ?
sol : câble le plus court lorsque x = 4,28 m $\Rightarrow$ d = 17.204m



41. ** Problème de la réflexion de la lumière (Descartes)
Etant donné un miroir plan, S une source lumineuse et O un oeil qui regarde dans le miroir. Trouver la position du point M où un rayon issu de S frappe le miroir pour aller ensuite dans l'oeil, sachant que la lumière suit le chemin le plus court. Sol : $x = \frac{a\,l}{a+b}$



42. ** Problème de la réfraction de la lumière (Descartes)
Etant donné une cuve remplie d'eau, S une source lumineuse à la distance a de la surface, 0 un oeil à la profondeur b recevant un rayon lumineux venant de S. Trouver la position du point M où le rayon frappe la surface de l'eau, sachant que la lumière met le temps minimal pour aller de S en O; la vitesse de la lumière étant v dans l'air et v' dans l'eau, avec v > v'. En déduire la loi de la réfraction de la lumière.
Sol : M est tel que $\sin \hat{\imath} = \frac{v}{v'} \sin r$ (et comme v > v', $\frac{v}{v'} > 1$ et donc i > r
$\Rightarrow$ le chemin le plus rapide n'est donc pas la ligne droite)



2. Vitesses et accélérations.

2.1 Notions.

Les problèmes de vitesses et d'accélérations se présentent lorsque nous avons un mouvement (espace parcouru) qui varie en fonction du temps (variable indépendante)

Dans un mouvement rectiligne, e_0 = position au temps t_0 et e = position au temps t, $\frac{\Delta e}{\Delta t}$ = vitesse moyenne sur l'espace de temps Δt

On définit la vitesse (taux de variation de e relativement au temps) à un instant donné quelconque comme la limite de la vitesse moyenne lorsque Δt tend vers 0 c'est-à-dire $v(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta e}{\Delta t} = \frac{de}{dt}$

De la même façon, l'accélération moyenne $a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t}$

Et l'accélération instantanée sera la limite de ce quotient lorsque Δt tend vers 0 c-à-d $a(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$

<u>En résumé :</u>

$$\boxed{v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta e}{\Delta t} = \frac{de}{dt} \quad \text{et} \quad a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}}$$

2.2 Exercices.

<u>Remarque</u> : pour la facilité des calculs nous prendrons la constante g = 10 m/s^2

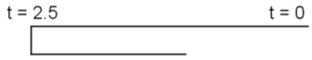
1. Prenons un corps qui tombe librement au voisinage de la surface de la terre.
Déterminez a) la vitesse moyenne pendant les t premières secondes de chute. sol : $v_m = gt/2$
b) la vitesse instantanée après 2 secondes de chute. sol : v = 20 m/s

2. On lance verticalement et vers le haut une balle avec une vitesse initiale de 80m/sec . Déterminer
a) La hauteur (position) et la vitesse de la balle après 2 secondes. sol : h = 140 m et v = 60 m/s
b) La hauteur maximale atteinte par cette balle. sol : h = 320 m
c) Sa vitesse et son accélération après 3 secondes. sol : v = 50 m/s a = 10 m/s^2

d) Le trajet (distance) parcouru durant la $4^{\text{ième}}$ seconde. sol : d = 45 m
e) Sa vitesse et son accélération lorsqu'elle va retomber sur le sol (moment où elle touche le sol) ?
sol : t = 16 s ; v = - 80 m/s et a = - 10

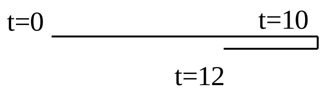
3. On tire un projectile à la verticale avec une vitesse initiale de 120 m/s. Après t secondes, selon les lois de la physique, sa distance du sol est donnée par $s(t) = 120t - 5t^2$
a) Calculer le moment et la vitesse auxquels le projectile s'écrase au sol.
b) Calculer l'altitude la plus élevée que le projectile atteigne.
c) A quelle accélération ce projectile est-il constamment soumis ?
sol : $v(t) = 120 - 10t$ $a = -10\ m/s^2$ a) t = 24 sec v = -120 m/s
b) t = 12 sec (v = 0m/s) s(t) = 720m c) $-10m/s^2$

4. Une particule se déplace sur une droite suivant la loi : $s(t) = t^4 - 6t^3 + 12t^2 - 10t + 3$ Déterminer
a) quand le sens du mouvement change?
b) quand la vitesse est croissante ou décroissante.
c) la distance totale parcourue durant les 3 premières secondes du mouvement.



sol : a) $v = (t-1)^2 (4t - 10) \Rightarrow$ tableau de signes $\Rightarrow$ en t = 2,5 (pas en t = 1)
b) $a(t) = 12 (t-1)(t-2) \Rightarrow$ signe de a(t) $\Rightarrow$ croissance de v(t)
c) $(e_{2,5} - e_0) + (e_{2,5} - e_3) = 51/8$

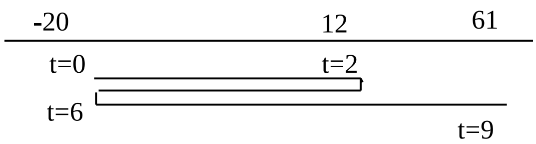
5. Un mobile se déplace suivant la loi $s(t) = 250\ t^2 - \frac{5}{4}\ t^4$. (Précisons que t est exprimé en minutes et les distances en m).
a) Décrire le mouvement de ce mobile (changements de sens à partir de t = 0)
b) Quelle est la vitesse maximale atteinte ?
c) Quelle distance le mobile a-t-il parcouru lorsque la vitesse atteint son maximum ?
d) Quelle distance a-t-il parcouru après 15 minutes ?
sol : a) $v = 500\ t - 5t^3$ $a = 500 - 15t^2$
(changement de sens en t = 10)



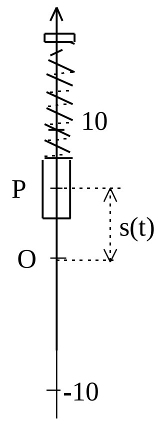
b) v_{max} : si $t = 10/\sqrt{3} \Rightarrow v_{max} = 10000/3\sqrt{3} = 1924{,}5$ m/min
c) 6944 m
d) 32 031 m

6. Une particule se déplace sur une droite suivant la loi : $s(t) = t^3 - 6t^2 + 9t + 4$. Déterminer
a) la position, l'accélération et l'espace parcouru lorsque la vitesse est nulle.
b) la position, la vitesse et l'espace parcouru lorsque l'accélération est nulle.
c) quand le sens du mouvement change-t-il?
sol : a) v = 0 si t = 1 $\Rightarrow$ e = 8, a = -6 et si t = 3 $\Rightarrow$ e = 4 et a = 6
b) a = 0 si t = 2 $\Rightarrow$ e = 6 et v = -3
c) v change de signe (donc changement de sens du mouvement) en t = 1 et t = 3

7. Soit $s(t)= t^3 - 12\ t^2 + 36t - 20$ la fonction position s d'un point P sur une droite graduée, dans laquelle t est exprimé en secondes et s(t) en centimètres. Donner une description du mouvement de P sur l'intervalle de temps [1, 9]
sol : $v(t) = 3t^2 - 24\ t + 36$ (rac : 6 et 2)
$a(t) = 6t - 24$ (rac : 4) $\Rightarrow$ tableau de signes ....



8. La position (en cm) du poids de la figure ci-contre est donnée par $s(t) = 10 \cos((\pi/6)t)$ où t est le temps en secondes. Etudier le mouvement du poids.



3. Taux de variation associés.

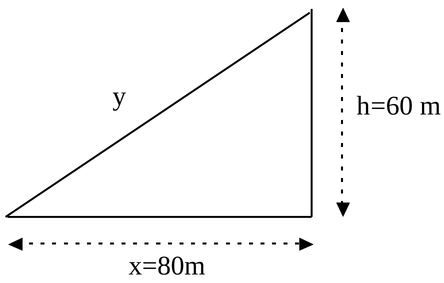
3.1 Introduction.

Beaucoup de problèmes font intervenir plusieurs variables qui sont liées entre elles et qui varient en fonction du temps. La variation de l'une de ces variables donnera une variation correspondante des autres variables. Le lien entre ces variations dépendra des relations qui existent entre les différentes variables.

Exemple.

Un homme s'avance à raison de 8 km/h vers une tour de 60 m de hauteur. A quelle vitesse s'approche-t-il du sommet de cette tour lorsqu'il est à 80m du pied de la tour ? Même question lorsqu'il est à 50m du pied de la tour.

Schématisons la situation :



y et x , distances du piéton au sommet de la tour et au pied de celle-ci sont des fonctions du temps.

Par la relation de Pythagore : $y^2 = x^2 + 60^2 \Rightarrow y^2(t) = x^2(t) + 60^2$

En dérivant les 2 membres de cette égalité, nous obtenons :

$2y \cdot \frac{dy}{dt} = 2x \cdot \frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{x}{y}\frac{dx}{dt}$: la vitesse par rapport au sommet de la tour vaut le rapport entre la distance au sol entre le piéton et le pied de la tour et la distance entre le piéton et le sommet de la tour multiplié par la vitesse du piéton au sol.

Lorsque le piéton est à 80 m du pied de la tour : $\frac{dy}{dt} = \frac{80}{100}\frac{dx}{dt} = \frac{8}{10}\frac{dx}{dt}$, ce qui revient à dire que la vitesse par rapport au sommet de la tour vaut les 8/10 de la vitesse par rapport au pied de la tour. Dans notre cas : vitesse par rapport au sommet de la tour = $\frac{8}{10}$. 8km/h = 6.4 km/h (= 16/9 m/s si on utilise les unités m et s)

Les problèmes suivants donnent différents exemples de situations de taux de variation liés.

3.2 Exercices.

1. Une plaque circulaire se dilate sous l'influence de la chaleur de telle sorte que son rayon croît uniformément de 0,01 cm/s Comment la surface croît-elle quand le rayon est de 2 cm ? 5 cm ?
   sol : a) $0,04\,\pi$ cm^2/s b) $0,1\,\pi$ cm^2/s
2. Une barre de 10 mètres se déplace de façon à ce que ses extrémités A et B restent respectivement sur les 2 axes rectangulaires OX et OY. En t = 0, A est à 8 mètres de l'origine O et s'en éloigne à la vitesse de 2 mètres par seconde.
   a) A quelle vitesse l'extrémité B descend-elle en t = 0 et en t = 0.5 s ?
   b) A quelle vitesse varie l'aire formée par AB et les axes en t = 0 et en t = 0.5?
   c) P étant le milieu de AB, quelle est la vitesse de variation de OP ?
   sol : a) - 8/3 m/s et – 18/ $\sqrt{19}$ b) – 46/3 m^2/s et – 143/ $\sqrt{19}$ m^2/s c) OP est constant
3. Un réservoir horizontal de 10 m de long a pour section droite un triangle rectangle isocèle de côté a posé sur sa pointe. L'eau coule à la vitesse de 8 m^3/mn. A quelle vitesse le niveau de l'eau s'élève-t-il quand sa distance à l'arête du fond est égale à 2m ? sol : 0,2 m/min
4. Un point se déplace sur la parabole d'équation $6y = x^2$. L'abscisse croît à raison de 2 m/sec. Lorsque l'abscisse vaut 6, quelle est la variation correspondante de l'ordonnée ? sol : 4m/s
5. Un point se déplace sur la parabole $y^2 = 12x$. Son abscisse croît d'une façon régulière de 2 cm par seconde. En quel point l'abscisse et l'ordonnée croissent-elles à la même vitesse ? sol : (3,6)
6. Les côtés d'un triangle équilatéral ont une longueur égale à a cm et augmentent de k cm par heure. a) A quelle vitesse la surface du triangle s'accroît-elle en t = 0 ? b) En t = 1 ? c) En t = 2 ?
   sol : $\frac{\sqrt{3}}{2}$ c k cm^2/h $\Rightarrow$ a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ a k cm^2/h b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (a + k) k cm^2/h c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (a + 2k) k cm^2/h
7. Le diamètre de base et la hauteur d'un cylindre ont pour mesure à un certain instant 10 cm et 20cm. Le diamètre augmente de 1cm/min. et le volume reste constant. Comment varie la hauteur à cet instant ?
   sol : -4cm/min

8. Du gaz s'échappe d'un ballon sphérique à raison de 900 cm^3/sec. A quelle vitesse la surface se rétrécit--elle quand le rayon de ce ballon est de 360 cm? sol : -5cm^2/s

9. Le pont d'une péniche est à 6 m au-dessous du niveau d'un quai. Un câble relie la péniche au quai. le câble s'enroule à la vitesse de 4 m à la minute. Quelle est la vitesse de la péniche lorsqu'elle se trouve à 8 m du quai ? sol : 5m/min

10. Un gazomètre contient 1000 m^3 de gaz à la pression de 0,38 N/m^2. Sachant que la pression diminue de 0,038 N /m^2 et par heure, calculer la vitesse de variation du volume au temps initial et après une heure en admettant comme valable la loi de Boyle-Mariotte : p.v = constante.
sol : a) 100 m^3 /h b) 123,456 m^3/h

11. La période P (en secondes) d'une oscillation complète d'un pendule de longueur l (en mètres) est donnée par la formule $P = 2\sqrt{l}$.
Quel est le taux de variation de la période par rapport à la longueur lorsque l = 0,36 m ? En utilisant ce résultat, calculer une valeur approchée de l'accroissement de P quand l passe de 0,36 m à 0,365 m.
sol : 1,666 s/m /0,0083 sec

12. **Les arêtes d'un tétraèdre régulier ont pour longueur 10 cm et leur mesure augmente de 0,1 cm/minute. A quelle vitesse le volume s'accroît-il au temps initial et après une minute ?
sol : 3,5355 cm^3 /min et 3,6066 cm^3/min

4. Dérivées et économie.

4.1 Considérations générales - Notations.

Les dérivées sont également employées dans le domaine de l'économie. Quand une fonction f décrit une grandeur économique, on emploie l'adjectif marginal pour caractériser sa dérivée f ' .
A propos de la quantité x d'un bien, les économistes parlent des fonctions C, c, R et P pour désigner :
Coût : C(x) = coût de production de x unités.
Coût moyen : $c(x) = \frac{C(x)}{x}$ = coût moyen de production d'une unité.
Recette : R(x) = recette de la vente de x unités.
Profit : P(x) = R(x) - C(x) = profit de la vente de x unités.
La variable x sera traitée comme un nombre réel même si, dans un tel contexte, elle ne prend le plus souvent que des valeurs entières (nombre d'unités de production). De plus $x \geq 0$ puisque la production d'un nombre négatif d'unités n'a pas de sens.

4.2 Exemple.

Un fabricant de cassettes magnétiques, dont les coûts mensuels fixes de production s'élèvent à 8400 € et le coût de production par cassette à 10 €, les vend à 17 € pièce.
a) trouver les expressions de C(x), c(x), R(x) et P(x)
b) Quelles sont les valeurs de ces fonctions lorsque x = 1000 ?
c)Combien de cassettes doit-il fabriquer pour être en équilibre financier ?

a) On trouve facilement : C(x) = 10x + 8400
$$c(x) = \frac{C(x)}{x} = 10 + \frac{8400}{x}$$
R(x) = 17x
P(x) = R(x) - C(x) = 7x - 8400
b) En prenant les valeurs de ces fonctions en x = 1000, nous obtenons :
C(1000) = 18400 (coût de fabrication de 1000 unités)
c(1000) =18.4 (coût moyen de production d'une unité)
R(1000)= 17000 (recette totale de 1000 unités vendues)
P(1000) = -1400 (profit de la fabrication de 1000 unités)
Le fabricant fait donc une perte de 1400 € par mois s'il ne fabrique et ne vend que 1000 cassettes par mois.
c) L'équilibre est atteint si on a un profit nul c-à-d $7x - 8400 = 0 \Leftrightarrow x = 1200$: dans ce cas, le fabricant rentre dans ses frais sans faire aucun bénéfice.

Si nous considérons maintenant les dérivées respectives de ces différentes fonctions C', c', R' et P' : elles portent respectivement le nom de coût marginal, coût moyen marginal, recette marginale et profit marginal.
La valeur C'(x) représente le coût marginal associé à la production de x unités du bien. La dérivée étant un taux de variation, C'(x) représente le taux de variation du coût en fonction du nombre d'unités produites. La même interprétation peut être donnée à propos de c'(x), R'(x) et P'(x)

pour n entier positif, on a : $C'(n) = \lim_{h \to 0} \frac{C(n+h) - C(n)}{h}$

Donc si h est petit, $C'(n) \cong \frac{C(n+h) - C(n)}{h}$

Lorsque le nombre d'unités produites est grand, les économistes considèrent que ce dernier quotient avec h = 1 est une bonne approximation du coût marginal, soit $C'(n) \cong C(n+1) - C(n)$
Le coût marginal associé à la production de n unités d'un bien est alors (approximativement) le coût de la production d'une unité supplémentaire.

4.3 Exercices.

1. Une firme fabrique le mécanisme électronique d'un jouet. Elle estime que le coût (en €) de fabrication de x mécanismes est donné par $C(x) = 200 + 0{,}05x + 0{,}0001\, x^2$
   a) Quel est le coût total, le coût moyen et le coût marginal de la production de 500 unités, 1000 unités, et 5000 unités.
   b) Comparer le coût marginal de la production de 1000 unités avec le coût de la production de la mille et unième unité.
   sol : a) $C(500) = 250 \Rightarrow c(500) = 0{,}5$ coût marginal = 0,15 $C(1000) = 350 \Rightarrow c(1000) = 0{,}35$ coût marginal : 0,25 $C(5000) = 2950 \Rightarrow c(5000) = 0{,}59$ coût marginal : 1,05
   b) Coût de la $1001^{\text{ème}}$ unité = 0,2501 ≅ coût marginal (1000) = 0,25

2. Soit $C(x) = 800 + 0.04x + 0.0002x^2$ la fonction de coût de production d'un certain bien. Chercher
   a) le coût de la production de 100 unités
   b) l'expression des fonctions de coût moyen et de coût marginal ainsi que leur valeur en x = 100
   sol : a) C(100) = 806 b) c(100) = 8,06 coût marginal (100) = 0,08 coût de la $100^{\text{ème}}$ unité : 0,0802