# VII. Lieux géométriques.

## 1. Généralités

### *1.1 Définition.*

Un lieu géométrique est un ensemble de points qui vérifient une propriété géométrique déterminée.

### *1.2 Méthodes.*

Pour déterminer un lieu géométriques, différentes méthodes peuvent être utilisées.

#### 1.2.1 La méthode de traduction

- Représenter graphiquement les données.
- Choisir un repère orthonormé. Celui-ci est choisi de manière telle que les droites données aient les équations les plus simples et les points donnés les coordonnées les plus simples.
- Traduire algébriquement la ou les conditions sur les points du lieu.
- On obtient alors une relation entre x et y que l'on simplifie au maximum.
- On analyse le lieu et on le trace.

#### 1.2.2 La méthode des génératrices.

Les génératrices sont des droites ou des cercles ou des courbes qui contiennent le point P dont on cherche le lieu (c'est à dire des lieux du point P). La méthode consiste à :

- Représenter graphiquement les données.
- Choisir un repère avec les mêmes exigences que pour la méthode de traduction (mais cette fois, il ne doit pas être nécessairement orthonormé)
- Préciser les équations des droites fixées et les coordonnées des points fixés.
- Identifier les génératrices.
- Chercher les équations des génératrices.
- Eliminer le paramètre entre les deux génératrices (et non résoudre le système) : on obtient ainsi l'équation du lieu.
- Analyser et construire le lieu.

#### 1.2.3 Remarques

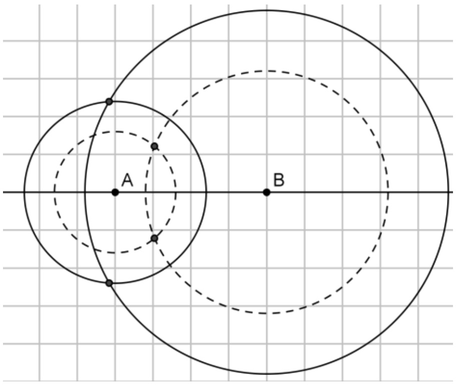
- L'utilisation de certaines propriétés de géométrie permet parfois de simplifier le travail de recherche (cfr exemple 2)
- L'utilisation des transformations du plan (homothéties, translations, rotations, symétrie centrale ou orthogonale) permet aussi dans certains cas de simplifier la recherche. (cfr exemple 3)
- Analyse et construction du lieu.
  1) Un lieu singulier est un lieu obtenu lorsque les deux génératrices sont partiellement ou totalement confondues.
  2) Un lieu parasite est un lieu obtenu par élimination du paramètre pour des valeurs non permises de ce paramètre.

# 2. Exemples

## 2.1 Exemple 1

*On donne 2 points fixes A et B. Déterminer le lieu des points qui sont 2 fois plus éloignés de B que de A*

### 2.1.1 Méthode des génératrices




Un point situé à une distance r du point A se trouve sur un cercle de centre A et de rayon r.
De même, un point situé à une distance 2r du point B se trouve sur un cercle de centre B et de rayon 2r.

Choix des génératrices :

La première génératrice est un cercle $C_1$ de centre A et de rayon r : $C_1$ (A, r)
La seconde génératrice est un cercle $C_2$ de centre B et de rayon 2r : $C_2$ (B, 2r)

Choix du repère :
l'axe des abscisses est la droite AB et l'axe des ordonnées est la perpendiculaire à AB menée par A.
Soit B de coordonnées (1, 0)
Nous avons $C_1 \equiv x^2 + y^2 = r^2$ et $C_2 \equiv (x - 1)^2 + y^2 = 4r^2$
En éliminant le paramètre entre ces deux équations, nous obtenons :
$(x - 1)^2 + y^2 = 4\,(x^2 + y^2)$
$\Leftrightarrow 3x^2 + 3y^2 + 2x - 1 = 0$
Les coefficients de $x^2$ et de $y^2$ étant égaux, on pense avoir ici l'équation d'un cercle : nous allons le justifier :
$\Leftrightarrow 3\,(x^2 + \frac{2}{3}x) + 3\,y^2 - 1 = 0$
$\Leftrightarrow 3\,(x + \frac{1}{3})^2 + 3\,y^2 - 1 - \frac{1}{3} = 0$
$\Leftrightarrow 3\,(x + \frac{1}{3})^2 + 3\,y^2 = \frac{4}{3}$
$\Leftrightarrow (x + \frac{1}{3})^2 + y^2 = \frac{4}{9}$
qui est l'équation d'un cercle de centre $(-\frac{1}{3}, 0)$ et de rayon $\frac{2}{3}$

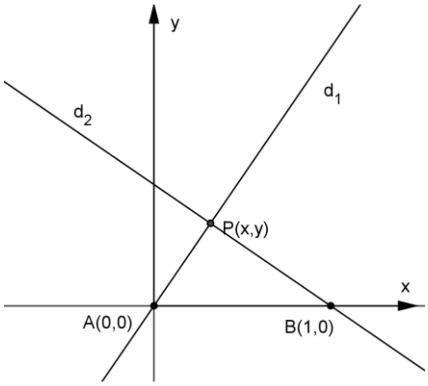
En général : le lieu est un cercle de centre C tel que $\overrightarrow{CA} = \frac{1}{3}\,\overrightarrow{AB}$ et de rayon = $\frac{2}{3}\,\overline{AB}$

### 2.1.2 Méthode de traduction

On peut également résoudre ce problème par la méthode de traduction.
Choix du repère : on choisira le même repère que dans la méthode des génératrices.
Donc : A(0, 0) et B(1, 0)
Soit $P(x, y) \in$ lieu $\Leftrightarrow 2\,\overline{AP} = \overline{BP} \Leftrightarrow 2\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$
En développant cette dernière égalité, on retrouve la même équation que celle qu'on avait trouvée par la méthode des génératrices.

## 2.2 Exemple 2

*On donne 2 points fixes A et B. Déterminer le lieu des projections orthogonales de B sur les droites comprenant le pointA*




Par la méthode des génératrices :
$d_1$ , la première génératrice est une droite comprenant le point A
$d_2$ , la seconde génératrice est la droite perpendiculaire à $d_1$ et comprenant le point B
Choix du repère : axe des abscisses est la droite AB et l'axe des ordonnées est la perpendiculaire à AB comprenant le point A.
Soit B(1, 0)
Ainsi : $d_1 \equiv y = mx$ et $d_2 \equiv y = -\frac{1}{m}(x-1)$
On va éliminer le paramètre entre ces équations.
A partir de chacune de ces équations, nous obtenons respectivement :
$m = \dfrac{y}{x}$ et $m = -\dfrac{x-1}{y}$

En égalant ces deux valeurs du paramètre : $y^2 = x(1-x) \Leftrightarrow y^2 = -x^2 + x$
$\Leftrightarrow y^2 + x^2 - x = 0$
$\Leftrightarrow y^2 + (x - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} = 0$
$\Leftrightarrow y^2 + (x - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$ qui est l'équation d'un cercle de centre ( $\frac{1}{2}$ , 0) et de rayon $\frac{1}{2}$

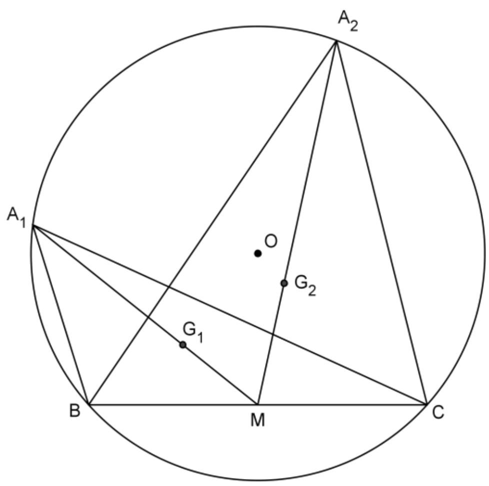
Généralisation : le lieu cherché est un cercle de diamètre $\overline{AB}$

Remarque : On peut simplifier cette recherche en utilisant une propriété géométrique connue : *"tout triangle rectangle est inscrit dans un demi-cercle dont l'hypoténuse est le diamètre."*
On obtient alors directement le lieu, cercle de diamètre $\overline{AB}$

## 2.3 Exemple 3

*Dans le triangle ABC, le segment BC est fixe. Le point A parcourt un cercle passant par B et C. Déterminer le lieu des centres de gravité des triangles ABC.*

Remarque : le centre de gravité d'un triangle est le point d'intersection de ses médianes. il se trouve aux $\frac{2}{3}$ de chaque médiane à partir du sommet.




Si on utilise la méthode des génératrices, ce seront les médianes qui seront choisies comme génératrices.
Dans ce cas cependant l'utilisation des transformations du plan sera plus intéressante.
En effet, nous savons qu'une homothétie de centre C et de rapport k, donne pour image à un point P le point P' tel que
$\overrightarrow{CP'} = k\,\overrightarrow{CP}$
Dans notre cas, A est sur le cercle. Le centre de gravité G se déplace donc sur l'image du cercle par l'homothétie de centre M, milieu de [BC], et de rapport $\frac{1}{3}$ c'est à dire un cercle de centre 0' tel que
$\overrightarrow{MO'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{MO}$ et de rayon $r' = \frac{r}{3}$
Et le problème est ainsi directement résolu.

# 3. Exercices

## 3.1 Rechercher les lieux suivants par la méthode de traduction.

1. Soit A(0,0) et B (-4, 6)
   Déterminer et représenter le lieu des points dont la somme des carrés des distances à A et B est égale à 28
2. A (-1, -2) et B (3, 2). Déterminer le lieu du point P tel que les droites AP $\perp$ BP (analytiquement et géométriquement)
3. Déterminer les équations des bissectrices des angles déterminés par les droites d'équations
   $d_1 \equiv 2x - y + 2 = 0$ et $d_2 \equiv x + 3y - 6 = 0$ (Vérifier graphiquement votre résultat)

## 3.2 Rechercher les lieux suivants par la méthode des génératrices

1. Dans le plan, rapporté à un repère orthonormé Oxy, on considère
   a) Le point A(0, 1) fixe sur Oy b) Un point B mobile sur Ox c) Un point C, mobile sur Oy, tel que l'angle $A\widehat{B}C$ soit droit.
   Représenter la situation et déterminer le lieu du point P, 4ème sommet du rectangle BOCP
   Dessiner ce lieu
2. Un segment de longueur constante l se meut de manière telle que les extrémités s'appuient en A et B, deux points variables sur les côtés d'un angle droit. On demande
   a) de décrire le lieu du milieu du segment [A,B]
   b) de décrire le lieu d'un point quelconque de ce segment
   N.B. pour illustrer la situation, on peut penser à une échelle appuyée sur un mur et qui glisse le long de celui-ci.
3. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on donne un point A, fixe sur l'axe des x et un point B mobile sur l'axe des y. Tracer le cercle circonscrit au triangle AOB ainsi que les tangentes à ce cercle aux point O et B. Déterminer le lieu des points d'intersection de ces tangentes.
   N.B considérer d'abord le cas où A(2, 0) et généraliser ensuite à A(a, 0)

## 3.3 Rechercher les lieux suivants en utilisant les transformations du plan

1. Dans un triangle ABC, le côté BC est fixe et la longueur d'un second côté (AB) est donnée : l.
   a) Déterminer le lieu des milieux des côtés AB du triangle ABC.
   b) Déterminer le lieu des milieux des côtés AC de ce triangle.
2. Un triangle ABC, rectangle en B a un côté AC de longueur fixe. on construit à l'extérieur du triangle un triangle équilatéral sur BC. Déterminer le lieu du 3ème sommet de ce triangle équilatéral.
3. Déterminer le lieu du sommet A d'un triangle ABC dont la base BC est fixe et la longueur de la médiane issue de B est donnée : l.

## 3.4 Exercices généraux

1. Quel est le lieu géométrique des points dont la somme des distances aux 4 côtés d'un carré est une constante égale à 3 fois le côté du carré ?
2. Quel est le lieu des points dont le rapport des distances à deux points fixes donnés est une constante donnée (cercle d'Apollonius) ?
3. Quel est le lieu des points dont la somme des carrés des distances à 2 points fixes donnés est une constante donnée ?
4. Quel est le lieu des points dont la valeur absolue de la différence des carrés des distances à deux points fixes donnés est une constante donnée ?
5. Quel est le lieu des points tels que les projections orthogonales de ces points sur les 3 côtés d'un triangle isocèle soient en ligne droite ?

6. Dans un parallélogramme OACB, un segment de droite [DE] de longueur constante l se déplace parallèlement à OA, tandis que son extrémité D glisse sur [OB]. Quel est le lieu des points d'intersection de AE et CD, ainsi que le lieu des points d'intersection de AD et CE ?
7. On donne un triangle ABC et P le milieu de [BC]. Si d est une droite mobile passant par P, $d \cap AB = \{D\}$ et $d \cap AC = \{E\}$, quel est le lieu des points d'intersection de BE et CD ?
8. On donne deux droites fixes a et b, $a \perp b$ et une droite mobile s de direction fixe donnée (coefficient de s = m) telle que $s \cap a = \{P\}$ et $s \cap b = \{Q\}$. Quel est le lieu des points d'intersection de AQ et BP, si A est un point fixe donné sur a, B un point fixe donné sur b (A et $B \neq a \cap b$). Dans quel cas, ce lieu est-il un cercle ?
9. On donne deux points fixes A et B et un cercle C, variable, passant par A et B. On trace la tangente en A au cercle et par B une parallèle à cette tangente. Quel est le lieu du second point d'intersection de cette parallèle avec le cercle ?
10. Les côtés d'un angle droit tournent autour du sommet P fixe. Ils s'appuient en A et B sur deux droites fixes a et b telles que $a \perp b$, $P \notin a$ et $P \notin b$. Quel est le lieu du milieu du segment [AB] ?