VIII. Les coniques (1)
Cercles – Ellipses - Hyperboles.

1 Introduction

Le terme conique désigne toutes les courbes telles que cercles, ellipses, hyperboles, paraboles. Pourquoi avoir groupé toutes ces courbes parfois si différentes sous un même nom ? Quel lien avec le cône ?

C'est ce que nous allons envisager dans ce chapitre en les étudiant séparément d'abord, et en cherchant leurs caractéristiques communes ensuite.

L'étude de ces courbes est particulièrement intéressante vu leurs nombreuses applications pratiques :

a) Les mouvements célestes sont toujours des trajectoires ellipsoïdales, paraboliques ou hyperboliques. (de même que celles des satellites artificiels...)
b) Le télescope, les antennes paraboliques, les projecteurs, les phares de voiture sont des utilisations de la propriété de réflexion de la parabole.

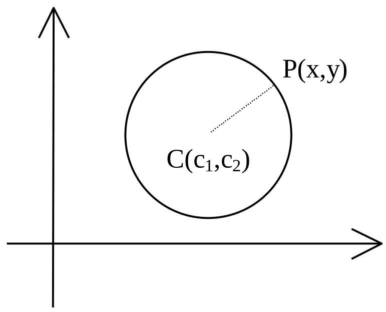
2 Rappel : Le cercle.

Le cercle fait partie des coniques : il est l'intersection d'un cône avec un plan perpendiculaire à son axe.

2.1 *Equation du cercle*

$P \in$ Cercle de centre $C(c_1, c_2)$ ssi $|PC| = r \Leftrightarrow \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = r$

En élevant au carré les 2 membres : $\Delta x^2 + \Delta y^2 = r^2$



Et nous obtenons :

$$\boxed{(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 = r^2}$$

l'équation d'un cercle de centre $C(c_1, c_2)$ et de rayon r.

En développant cette équation, nous obtenons :

$x^2 + y^2 - 2c_1x - 2c_2y + c_1^2 + c_2^2 = r^2$

Nous avons ainsi une équation du deuxième degré en x, y qui n'a pas de terme en xy et dont les termes en x^2 et en y^2 ont même coefficient.

Réciproquement si nous considérons une équation du deuxième degré en x, y sans terme en en xy et dont les termes en x^2 et en y^2 ont même coefficient, nous allons voir à quelle condition cette équation est celle d'un cercle.

Soit $x^2 + y^2 + px + qy + k = 0$

$$\Leftrightarrow \left(x^2 + px + \frac{p^2}{4}\right) + \left(y^2 + qy + \frac{q^2}{4}\right) = \frac{p^2}{4} + \frac{q^2}{4} - k \Leftrightarrow \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{q}{2}\right)^2 = \frac{p^2 + q^2 - 4k}{4}$$

Si $p^2 + q^2 - 4k \geq 0$ alors cette équation est celle d'un cercle dont le centre a pour coordonnée $\left(-\frac{p}{2}, -\frac{q}{2}\right)$ et dont le rayon est $\frac{\sqrt{p^2 + q^2 - 4k}}{2}$

Dans le cas contraire, aucun point du plan n'a des coordonnées qui vérifient cette équation.

2.2 *Application.*

a) Déterminer le centre et le rayon du cercle d'équation $x^2 + y^2 - x + y - 1 = 0$
b) Déterminer l'intersection de ce cercle avec $d \equiv x + 2y + 2 = 0$

a) sol : $C\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ $\qquad r = \frac{\sqrt{1+1+4}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$

b) Nous allons résoudre le système formé par les équations de la droite et du cercle : $\begin{cases} x + 2y + 2 = 0 \\ x^2 + y^2 - x + y - 1 = 0 \end{cases}$

De la première équation nous tirons : $x = - 2y - 2$. Remplaçons dans la seconde équation :

$(-2y - 2)^2 + y^2 - (-2y - 2) + y - 1 = 0 \Leftrightarrow 4y^2 + 8y + 4 + y^2 + 2y + y + 2 - 1 = 0 \Leftrightarrow 5y^2 + 11y + 5 = 0$

$\Rightarrow y = \frac{-11 \pm \sqrt{21}}{10}$ et $x = \frac{1 \mp \sqrt{21}}{5}$

Nous avons ainsi 2 points d'intersection : (-0,71, - 0,64) et (1,11, - 1,55). Ces solutions peuvent facilement être vérifiées graphiquement.

Remarque.

Dans ce type d'application, 3 situations sont possibles :

- 2 solutions : $d \cap C$ = 2 points : la droite est sécante au cercle.
- 1 solution : $d \cap C$ = 1 point : la droite est tangente au cercle
- 0 solution : $d \cap C = \varnothing$: la droite ne coupe pas le cercle.

2.3 Exercices

1. Quelle est l'équation du cercle de centre C(2, 3) et de rayon r = 5 ?

2. Quelle est l'équation du cercle de diamètre PQ où P (-2, 2) et Q (4, 6)

3. Déterminez le centre et le rayon des cercles d'équation :
   a) $x^2 + y^2 + 2x - 6y = 0$
   b) $2x^2 + 2y^2 - 6x + 16 y - 100 = 0$
   c) $x^2 + y^2 - x + y + 3 = 0$
   d) $9x^2 - 25y^2 - 36x + 50y - 161 = 0$
   Représentez ces cercles si possible.

4. Déterminez l'équation cartésienne du cercle de centre (0, 2) tangent à la droite $d \equiv x - 2y - 2 = 0$

5. Déterminez les équations des tangentes au cercle $C \equiv x^2 + y^2 - 36 = 0$ faisant un angle de 60° avec la partie positive de l'axe des abscisses.

6. Sous quelle condition, l'équation $2mx^2 + (1 - m)y^2 - x + 2my + m = 0$ est-elle l'équation d'un cercle ? Donnez son centre et son rayon.

7. Quelle est l'équation du diamètre du cercle $C \equiv x^2 + y^2 + 4x - 6y - 12 = 0$ qui est $\perp$ à $d \equiv 5x + 2y - 13 = 0$

8. Etant donné l'équation $x^2 + y^2 - 2x + 4y + k = 0$. Déterminer la valeur de k pour que
   a) Cette équation soit celle d'un cercle.
   b) Ce cercle comprenne le point P(3, 4)
   c) Ce cercle ait 4 comme rayon
   d) Ce cercle soit tangent à l'axe des abscisses
   e) Ce cercle soit tangent à la droite $d \equiv y = x$

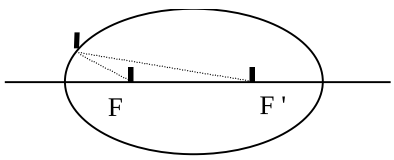
9. Déterminez l'équation du cercle déterminé par les 3 points A, B, C si
   a) A(0,0) B(3, 3) C(4, -4) b) A(1, -1) B(3, 3) et C(5, 1)

3 L'ellipse

3.1 Où rencontrer l'ellipse ?

Les situations proposées ci-dessous donnent lieu à des courbes "ovales". sont-elles des ellipses ? Comment caractériser de telles courbes?

Exemples :

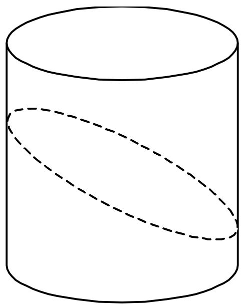


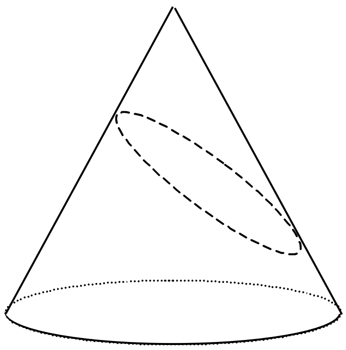
1. Pour tracer des parterres de fleurs dans les jardins, le jardinier plante deux piquets (F et F') dans le sol, puis place autour de ces piquets une corde nouée en boucle. Il tend la corde à l'aide d'un troisième piquet et utilise ce dernier piquet pour tracer une courbe au sol en

tournant autour des deux premiers en veillant à ce que la corde demeure toujours tendue. Il obtient ainsi une courbe "ovale"

2. La section d'un cylindre droit par un plan donne une courbe fermée ressemblant à la précédente.

3. La section d'un cône circulaire par un plan donne une courbe ovale ressemblant aux courbes précédentes





4. Si on regarde l'ombre d'une balle sphérique produite par le soleil, le contour extérieur est une courbe qui semble du même type.

5. On dispose d'une plaque plane et d'une lampe halogène. Si on regarde l'ombre de la même balle sphérique sur cette plaque, le contour de cette ombre ressemble parfois aux courbes ovales obtenues précédemment.

6. On découpe un disque dans une feuille de papier en marquant bien son centre O. On choisit un point quelconque A et on répète un grand nombre de fois la manœuvre suivante : "ramener un point du bord du disque sur le point A et marquer la pliure." Toutes les pliures ainsi obtenues forment l'enveloppe d'une courbe ovale.

7. Considérons un cercle et l'un de ses diamètres. Lorsqu'on comprime ce cercle dans un rapport k perpendiculairement au diamètre fixé, on obtient encore une courbe "ovale".

8. Considérons deux droites perpendiculaires a et b et le point O de leur intersection. Considérons deux points C_1 et C_2 de la droite a, symétriques par rapport au point O, et deux points C_3 et C_4 de la droite b également symétriques par rapport à O. Traçons quatre arcs de cercles:
   - l'arc de cercle de centre C_3 , passant par C_4 ,entre les droites C_3 C_2 et C_3 C_1
   - l'arc de cercle de centre C_4 ,passant par C_3 ,entre les droites C_4 C_1 et C_4 C_2
   - l'arc de cercle de centre C_1 entre les droites C_1 C_3 et C_1 C_4 complétant les deux premiers arcs
   - l'arc de cercle de centre C_2 entre les droites C_2 C_3 et C_2 C_4 complétant les deux premiers arcs

   Nous obtenons un ovale qui par sa forme rappelle les courbes précédentes.

3.2 Définition

Dans le premier exemple, on peut facilement déduire une propriété des points situés sur l'"ovale" obtenu par le jardinier. En effet, tous ces points sont tels que la somme de leurs distances aux deux piquets fixes est une constante : la longueur de la ficelle. Cette caractéristique va être la base de la définition de l'ellipse :

L'ellipse est le lieu géométrique des points du plan dont la somme des distances à 2 points fixes est une constante (supérieure à la distance entre les 2 points fixes).

Les 2 points fixes sont appelés *foyers* de l'ellipse et sont notés F et F'

La distance entre les 2 points fixes (2c) est appelée *distance focale*.

La somme des distances d'un point de l'ellipse aux foyers est notée 2a

3.3 Méthode construction

On peut construire l'ellipse par points de façon précise.

a) Tracer C(F, R_1) $0 < R_1 < 2a$ et C ' (F ', R'_1) tels que $R'_1 = 2a - R_1$

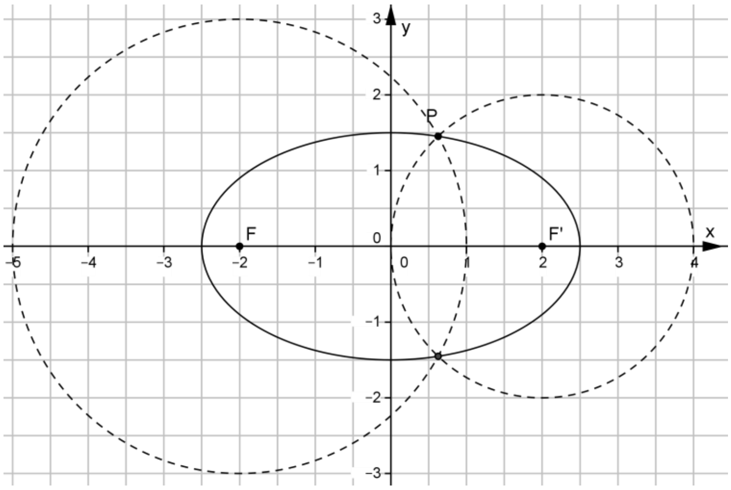
b) les points d'intersection de C et C ' sont des points de l'ellipse car

d (P,F) + d(P, F ') = $R_1 + R'_1 = 2a$

En recommençant avec différentes valeurs de R_1 , on obtient une série de points qu'il suffit de relier.

Dans le graphique ci-contre :

a = 2.5, b = 1.5, c = 2, $R_1 = 3$ et $R'_1 = 2$



Remarque : Les rayons choisis ne sont pas totalement quelconques: ils ont une valeur minimale et une valeur maximale : soit r la valeur minimale et R la valeur maximale.

On a : R = 2a - r (car R + r = 2a) et R - r = 2c (lorsque le grand cercle et le petit cercle sont tangents)

$\Rightarrow$ 2a - r - r = 2c $\Leftrightarrow$ 2a - 2c = 2r $\Leftrightarrow$ a - c = r et donc R = 2a - a + c = a + c $\Rightarrow$ a - c $\leq$ rayons $\leq$ a + c.

ex : si 2a = 8 cm 2c = 6 cm $\Rightarrow$ 1 cm $\leq$ rayons $\leq$ 7 cm

3.4 Construction dynamique : utilisation de géogébra

- Tracer un segment [AB] (longueur de [AB] = longueur du grand axe de l'ellipse)
- Placer un point C sur ce segment
- Tracer autre segment [DE] tel que $\overline{DE} < \overline{AB}$ ($\overline{DE}$ = la distance focale)
- Tracer les cercles de centre D et de rayon = distance [A,C] et de centre E et rayon = distance [C,B]
- Utiliser l'outil "points sur 2 objets" : les deux cercles
- Activer la trace de ces points (clic droit sur le point puis trace activée) et déplacer le point C sur le segment [A,B] (ou utiliser l'outil "lieu" des points d'intersection lorsque C parcourt le segment [A,B]
- Facultatif : *menu « éditer », « propriétés » : renommer les foyers F et F' par exemple.*

Visualisation de la méthode : http://www.geogebratube.org/material/show/id/43481

3.5 Les formes du point 3.1 sont-elles des ellipses ?

Dans le point 3.1, nous avons donné une série d'exemples de situations donnant lieu à des courbes "ovales". Nous allons maintenant analyser ces situations afin de déterminer dans quels cas, il s'agit d'une ellipse.

3.5.1 La courbe du jardinier

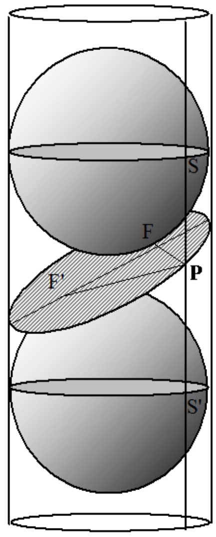
La première courbe obtenue est bien évidemment une ellipse, puisque la construction du jardinier a servi de base à la définition de l'ellipse.

3.5.2 La section d'un cylindre droit par un plan.

a) Définition : deux cercles sont parallèles ssi ils sont inclus dans des plans parallèles (donc ssi 2 diamètres sécants de l'un sont parallèles au plan de l'autre)

b) Rappel et prolongement : dans le plan, nous savons que si d'un point extérieur à un cercle, nous traçons les 2 tangentes au cercle issues de ce point, les longueurs des segments compris entre ce point et les points de contact sont égales. De même : toutes les tangentes à une sphère issues d'un point extérieur à celle-ci forment un cône. La longueur du segment compris entre ce point et n'importe quel point de contact est constante.

c) <u>Démonstration</u>
Inscrivons dans le cylindre deux sphères tangentes au plan de section et situées de part et d'autre de celui-ci   Nous avons :



- F et F' les points de contact de ces sphères avec le plan de section.
- C et C' les cercles formés par les points de contact de ces deux sphères avec le cylindre. C // C'
- P un point de la section.
- S et S' les points d'intersection de la génératrice du cylindre comprenant le point P avec les cercles C et C'

Nous avons : |PF| = |PS| (Segments issus d'un point P et tangents à une même sphère.)

De même, on a : | PF' | = | PS' |

⇒ | PF | + | PF' | = | PS | + | PS' |= | SS' |

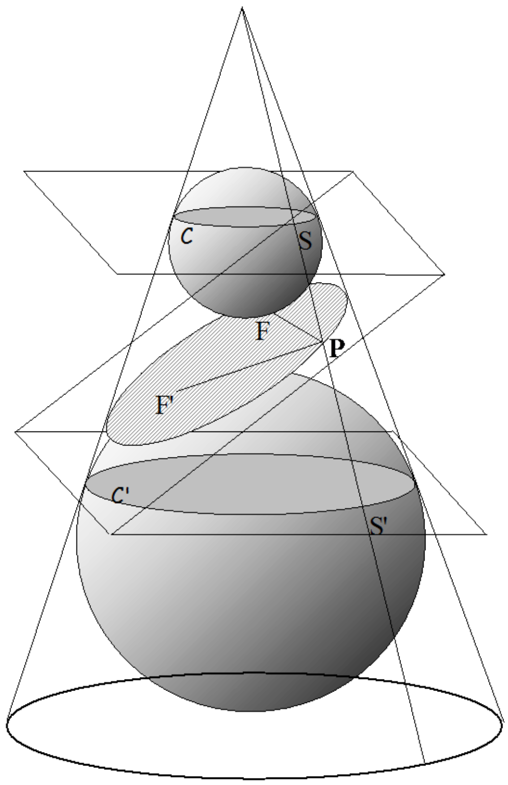
Qui exprime que la somme des distances du point P aux points F et F' est une constante égale à la distance entre les "équateurs " des deux sphères : | SS' |

La section est donc une ellipse de foyers F et F' et de grand axe = |SS'|

3.5.3 La section d'un cône par un plan

<u>Théorème de Dandelin et Quételet (1ère partie)</u>
La section d'un cône par un plan qui coupe toutes les génératrices d'une nappe du cône est une ellipse.

La démonstration qui suit est donnée pour information.
Comme pour le cylindre, nous inscrivons 2 sphères dans le cône : l'une (la petite sphère) au-dessus du plan de section et l'autre (la grosse sphère) en dessous de celui-ci.



Soient

- F et F' les points de contact de ces sphères avec le plan de section.
- C et C' les cercles formés par les points de contact de ces deux sphères avec le cône.
- P un point de la section.
- S et S' les points d'intersection de la génératrice du cône comprenant le point P avec les cercles C et C'

La démonstration est alors tout à fait semblable à celle que nous avons faite pour le cas du cylindre :

| PF | = | PS | (car ce sont deux segments tangents à une même sphère et issus d'un même point P.)

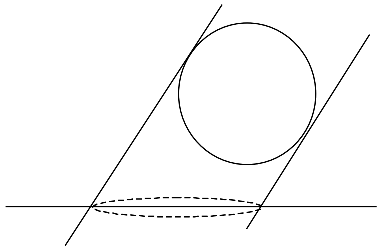
De même : | PF' | = | PS' | ⇒ | PF | + | PF' | = | PS | + | PS' |= | SS' |

Qui exprime que la somme des distances du point P aux points F et F' est une constante égale à la longueur du segment de la génératrice du cône compris entre les deux cercles C et C' : |SS'|

⇒ La section est donc une ellipse de foyers F et F' et de grand axe = | SS' |

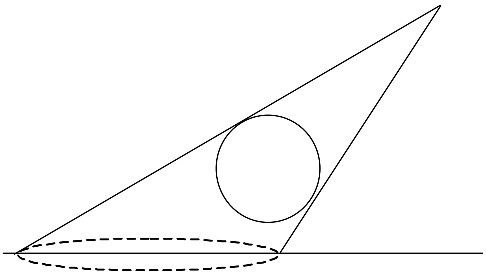
3.5.4 L'ombre d'une balle sphérique éclairée par le soleil, sur une surface plane

On peut considérer cette situation comme celle de la section plane d'un cylindre droit. En effet, les rayons solaires "tangents" à la sphère forment un cylindre imaginaire et la plaque joue le rôle d'un plan qui coupe ce cylindre.

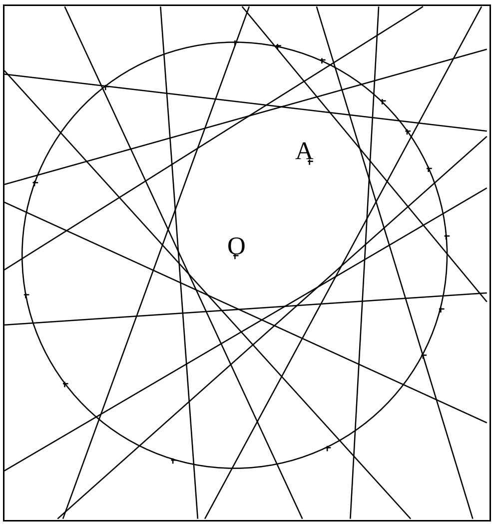


3.5.5 L'ombre d'une balle sphérique éclairée par une lampe halogène sur une surface plane.

On peut considérer cette situation comme celle de la section plane d'un cône droit. En effet, les rayons lumineux "tangents" à la sphère forment un cône imaginaire et la plaque joue le rôle d'un plan qui coupe ce cône.



3.5.6 Le pliage du disque

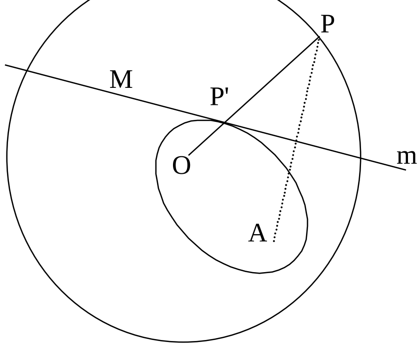


Considérons un cercle de rayon r, de centre O et un point A intérieur au cercle. En ramenant des points du bord du disque sur le point A, nous constatons que les pliures successives forment l'enveloppe d'une courbe ovale.

Dans le schéma ci-contre les médiatrices des segments reliant les points du cercle au point A représentent les différentes pliures.

L'observation de la courbe obtenue nous suggère qu'il s'agit d'une ellipse dont les foyers seraient les points 0 et A. Vérifions-le.

Sur le second schéma, P est un point quelconque du bord du disque. La droite m représente l'une des pliures. m est donc la médiatrice du segment [PA]. Montrons que toutes les médiatrices obtenues en déplaçant le point P sur le cercle sont tangentes à une même ellipse de foyers 0 et A et de grand axe r



a) <u>Montrons que m comprend un point de l'ellipse.</u>

Soit $\{P'\} = OP \cap m$

Nous avons : $| OP' | + | P'A | = | OP' | + | P'P | = r$ (car $|P'A| = |P'P|$ car $P' \in$ médiatrice de [AP])et donc la somme des distances du point P' aux points A et O est une constante r. Ce point P' appartient donc à une ellipse de foyers A et O et de grand axe égal à r.

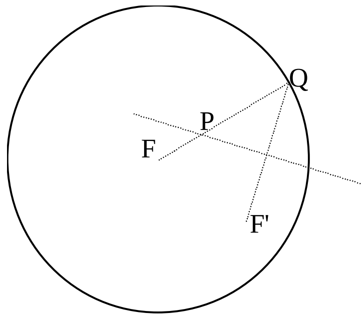
b) <u>Montrons que m ne comprend aucun autre point de cette ellipse.</u>

En effet, $\forall$ M $\in$ m et M $\neq$ P', montrons que M $\notin$ ellipse décrite ci-dessus.

Nous avons : $| MO | + | MA | = | MO | + | MP | > | OP | = r$ (le grand axe); la dernière inégalité est justifiée par l'inégalité triangulaire dans le triangle MOP (chaque côté d'un triangle est inférieur à la somme des deux autres.)

$\Rightarrow$ m est bien tangente à l'ellipse de foyers O et A et de grand axe r

3.5.7 Conséquences



A Nouvelle méthode de construction d'une ellipse : la méthode du cercle directeur.

Après avoir fixé les deux foyers et la longueur du grand axe 2a, on considère le cercle de rayon 2a centré en F.

Soit Q un point de ce cercle.

On obtient un point P de l'ellipse à l'intersection du segment [FQ] avec la médiatrice de [F 'Q].

L'ellipse de foyers F et F ' et de grand axe 2a est donc le lieu du point P lorsque Q parcourt le cercle de centre F et de rayon 2a. Ce cercle est appelé cercle directeur de l'ellipse.

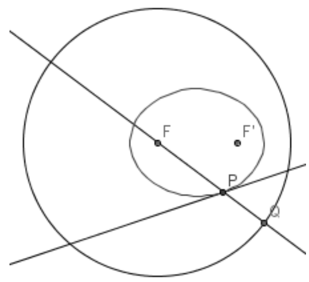
B Utilisation de Géogébra pour réaliser cette construction en dynamique :

- Tracer un cercle (de centre A et comprenant B), placer un point C sur ce cercle et un point D à l'intérieur du cercle.
- Tracer la médiatrice du segment joignant le point intérieur au cercle (D) et le point sur le cercle (C)
- Tracer la droite comprenant le centre du cercle (A) et le point sur le cercle (C)
- Utiliser l'outil "point sur 2 objets": les deux droites puis activer la trace de ce point.
- Déplacer le point C sur le cercle (ou choisir le lieu des points d'intersection lorsque C se déplace sur le cercle)
- Facultatif : *menu « éditer », « propriétés » : supprimer les étiquettes des différents objets et renommer les foyers F et F' par exemple.*

Visualisation de la méthode : http://www.geogebratube.org/material/show/id/43482

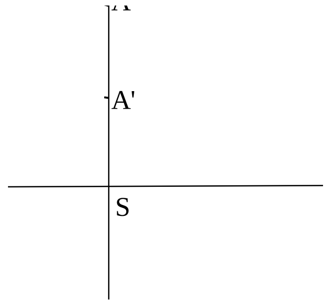
C. Construction de la tangente à une ellipse en un point de celle-ci
Soit une ellipse de foyers F et F' et de grand axe 2a

Pour construire la tangente à cette ellipse au point P



- On trace le cercle de centre F et de rayon 2a.
- On détermine le point Q, intersection du cercle avec la droite FP
- La tangente à l'ellipse au point P est la médiatrice de [F 'Q]

3.5.8 La compression du cercle.



Une compression du plan perpendiculairement à une direction d et de rapport k notée Comp. (d, k) est une transformation du plan telle que $\forall A \in \pi$:

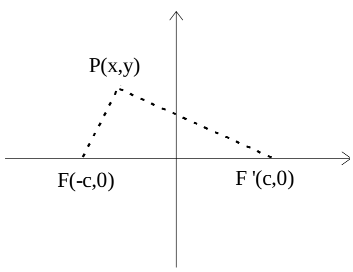
Comp.(A) = A' avec $AA' \cap d = \{S\} \Leftrightarrow AA' \perp d$ et $\dfrac{|SA'|}{|SA|} = k$

Pour vérifier que la compression du cercle est une ellipse, nous allons d'abord chercher quelle condition doivent vérifier les coordonnées des points du plan pour appartenir à une ellipse et ensuite vérifier que les points d'un cercle comprimé vérifient bien cette condition.

Nous procéderons de même pour la construction à partir d'arcs de cercle.

3.6 Equation cartésienne de l'ellipse

Nous allons maintenant exprimer la condition à vérifier par les coordonnées d'un point pour qu'il appartienne à l'ellipse



Nous choisissons un repère orthonormé. En tenant compte des symétries du lieu, on prendra comme centre du repère, le milieu du segment joignant les deux foyers, l'axe des abscisses étant la droite comprenant ces foyers.

$P(x,y) \in E$ ssi $d(P,F) + d(P,F') = 2a$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x + c)^2 + y^2} + \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = 2a$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right)^2 = \left(2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2$

$\Leftrightarrow (x + c)^2 + y^2 = 4a^2 + (x - c)^2 + y^2 - 4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2}$

$\Leftrightarrow x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 + x^2 - 2cx + c^2 + y^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$

$\Leftrightarrow 4cx - 4a^2 = - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$

$\Leftrightarrow cx - a^2 = - a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$

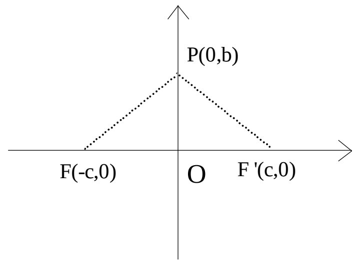
$\Leftrightarrow (cx - a^2)^2 = a^2((x - c)^2 + y^2)$

$\Leftrightarrow c^2 x^2 + a^4 - 2ca^2 x = a^2(x^2 - 2cx + c^2 + y^2)$

$\Leftrightarrow c^2 x^2 + a^4 - 2ca^2 x = a^2 x^2 - 2ca^2 x + a^2 c^2 + a^2 y^2$

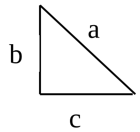
$\Leftrightarrow (a^2 - c^2) x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2 c^2$

$\Leftrightarrow (a^2 - c^2) x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$



En posant $a^2 - c^2 = b^2$ (car $a^2 > c^2$) :

$\Leftrightarrow b^2x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2 \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ où $a > c$, $a^2 - c^2 = b^2$ et donc $a^2 > b^2$



Remarques :

Graphiquement, nous voyons facilement :
2c est la distance entre les 2 foyers et est appelée _distance focale_.
2a est la longueur du _grand axe_ de l'ellipse.
2b est la longueur du _petit axe_ de l'ellipse. (par le théorème de Pythagore dans le triangle OPF lorsque P est sur l'axe des ordonnées)

3.7 Terminologie

Le _centre de l'ellipse_ est le milieu de [FF ']

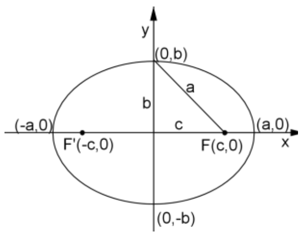
FF ' est appelé _axe focal ou grand axe._

Le _petit axe ou axe non focal_ est la médiatrice de [FF ']

Les _sommets_ sont les intersections de l'ellipse avec ses axes

Longueur du grand axe = la distance entre les sommets de l'axe focal : $|S_1S_3| = 2a$

Longueur du petit axe est la distance entre les sommets de l'axe non focal: $|S_2 S_4| = 2b$

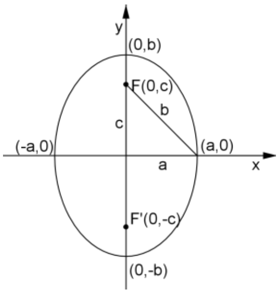


3.8 Remarques

1. Les axes de E sont des axes de symétrie. O est un centre de symétrie.
   Le cercle est en fait un cas particulier de l'ellipse lorsque $a^2 = b^2$: dans ce cas les 2 foyers sont confondus et deviennent centre du cercle.
2. Une ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ est également la réunion des graphes de 2 fonctions.

   En effet, l'équation ci-dessus équivaut à $a^2 y^2 = a^2 b^2 - b^2 x^2 \Leftrightarrow y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$

   Et donc nous pouvons associer deux fonctions à cette équation :
   $f_1(x) = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ et $f_2(x) = - \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$
   Une étude systématique de ces deux fonctions nous permettrait de retrouver le graphe de l'ellipse et toutes ses caractéristiques.



3. Si les foyers de l'ellipse sont sur l'axe des y, 2b représentant cette fois la somme des distances aux foyers, l'équation reste :
   $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ où $b > c$, $b^2 - c^2 = a^2$ et donc $b^2 > a^2$

   En pratique : Pour reconnaître à quel type d'ellipse on a affaire , il suffit de comparer les valeurs de a et b :
   si $a > b$, alors on a une ellipse d'axe focal horizontal
   si $a < b$, alors on a une ellipse d'axe focal vertical.

3.9 Exercices.

1. Déterminer les équations cartésiennes des ellipses suivantes (les foyers $\in$ axe des x).
   Tracer ces ellipses et déterminer les coordonnées de leurs foyers.
   a) a = 3 et c = 2
   b) $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $c = \frac{\sqrt{3}}{3}$
   Reprendre ensuite le problème lorsque les foyers appartiennent à l'axe des y.

2. Soient les ellipses dont les équations suivent.
   Déterminer les coordonnées des foyers, des sommets, la distance focale, la longueur des axes de ces ellipses et la représenter.
   $E_1 \equiv \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ $E_2 \equiv \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$ $E_3 \equiv 6x^2 + 2y^2 = 3$
   $E_4 \equiv 25x^2 + 16y^2 = 100$ $E_5 \equiv 9x^2 + 4y^2 - 6 = 0$ $E_6 \equiv \frac{x^2}{15} + \frac{y^2}{4} = 1$

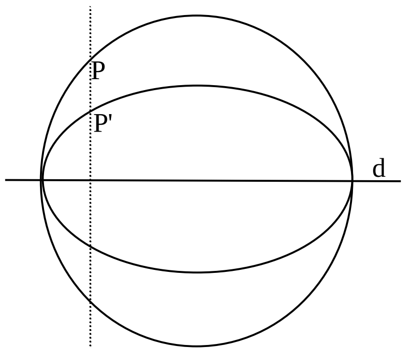
3. Déterminer l'équation de l'ellipse d'axes ox et oy , de centre 0, dont la longueur du petit axe vaut 8 et la distance focale égale 10. (le grand axe est sur l'axe des ordonnées)

4. Donner une équation cartésienne des ellipses dont on sait que le centre est O(0,0) et que les foyers sont sur l'axe des y (sauf pour l'ellipse d où ils sont sur l'axe des x). Pour chacune de ces ellipses, on donne en plus :
   a) longueur du petit axe : 12; longueur du grand axe : 18
   b) longueur du grand axe : 16; distance focale : 12
   c) longueur du grand axe : 32; un point de coordonnées (1, 2)
   d) deux points $(1, \frac{\sqrt{3}}{2})$ et $(\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$
   e) un foyer F(0, 4) et un point P(3, 2)

3.10 La compression du cercle

Revenons maintenant au cas de la compression du cercle.

Nous envisagerons le cas du cercle centré à l'origine et comprimé perpendiculairement à l'axe des abscisses.



Soit P(x, y) ayant pour image le point P' (x', y') tel que : x' = x et y' = ky.
Si P(x, y) $\in$ cercle de centre O et de rayon r, il vérifie l'équation de celui-ci

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = r^2$

En exprimant x et y en fonction de x' et y', nous obtenons : $x = x'$ et $y = \frac{y'}{k}$

L'équation du cercle devient alors : $x'^2 + \frac{y'^2}{k^2} = r^2 \Leftrightarrow \frac{x'^2}{r^2} + \frac{y'^2}{r^2k^2} = 1$

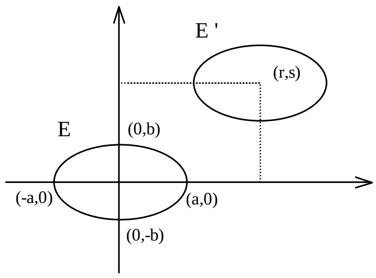
- Si k < 1, il s'agit de l'équation d'une ellipse dont les foyers, sur l'axe des abscisses, ont pour coordonnées respectives : $(-r\sqrt{1-k^2}, 0)$ et $(r\sqrt{1-k^2}, 0)$
- Si k > 1, il s'agit de l'équation d'une ellipse dont les foyers, sur l'axe des ordonnées, ont pour coordonnées : $(0, -r\sqrt{k^2-1})$ et $(0, r\sqrt{k^2-1})$
  On a alors une élongation.

3.11 La construction à partir d'arcs de cercle.

La méthode de construction montre directement que cette courbe est constituée de la réunion de plusieurs arcs de cercle de centres et de rayons différents, les points de ces différents arcs vérifiant les équations des cercles correspondants et pas celle d'une ellipse.

3.12 Equation cartésienne d'une ellipse non centrée à l'origine (changement de repère)

Soit $E \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ une ellipse centrée à l'origine



Nous recherchons l'équation de E ' , translatée de E, de centre (r,s) (les foyers de E ' appartiennent donc à une droite parallèle à l'axe des abscisses.

P (x,y) $\in$ E ' ssi P ' (x - r, y - s) $\in$ E c-à-d si les coordonnées de P' vérifient l'équation de E $\Leftrightarrow \frac{(x-r)^2}{a^2} + \frac{(y-s)^2}{b^2} = 1$

Cette dernière équation est donc l'équation de E '

On constate facilement que tous les points de l'ellipse ont subi une même translation.

Les sommets de E ayant pour coordonnées : (-a,0) , (a,0) , (0, -b) , (0 , b) les sommets de E ' seront respectivement (r-a,s) , (r+a,s) , (r,-b+s) , (r,b+s)

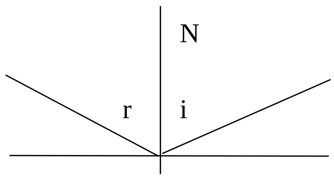
Nous pouvons faire le même raisonnement pour une ellipse d'axe focal vertical.

3.13 Exercices.

1. Déterminer l'équation de l'ellipse centrée en (1/2, -1) , dont le grand axe // à ox = 8 et la distance focale = 6
2. Déterminer l'équation de l'ellipse centrée en (2, -5) , dont le petit axe est // à ox et mesure 6 cm et dont le grand axe // oy = 9 cm. Déterminer les coordonnées des sommets. Représenter
3. Déterminez l'équation de l'ellipse centrée en $(-2, \frac{1}{2})$ de foyer $(-2, \frac{7}{2})$ et de sommet $(0, \frac{1}{2})$
4. Déterminez l'équation de l'ellipse centrée en $(-1, \frac{2}{3})$, de grand axe de mesure 12 et de foyer $(4, \frac{2}{3})$
5. Représenter les ellipses suivantes et donner toutes leurs caractéristiques.
   $E_1 \equiv x^2 + 4y^2 - 6x - 16y + 9 = 0$ $\quad$ $E_2 \equiv 4x^2 + 9y^2 + 12x - 6y - 26 = 0$
   $E_3 \equiv 9x^2 + 16y^2 - 18x + 64y + 57 = 0$ $\quad$ $E_4 \equiv 9x^2 + 4y^2 - 6x - 12y - 26 = 0$

3.14 Propriété de réflexion de l'ellipse

Tout rayon lumineux (ou toute onde) partant de l'un des foyers d'une ellipse est réfléchi sur l'ellipse en un rayon qui passe par l'autre foyer.



N.B. : c'est le sens qu'on donne au mot "foyer" dans le langage courant : un lieu de rencontre.

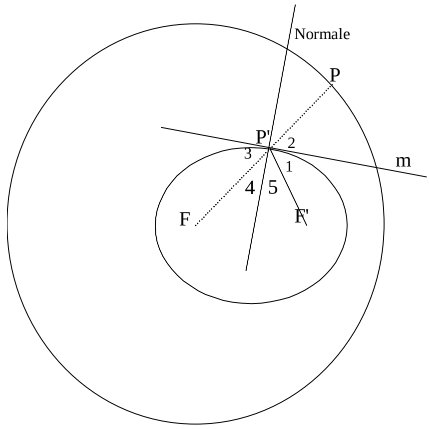
Selon une loi physique, un rayon incident en un point d'une surface réfléchissante est retourné en un rayon formant le même angle avec la normale à la surface en ce point.

Dans la figure ci-contre, $\hat{i}$ et $\hat{r}$ sont respectivement les angles d'incidence et de réflexion.

Pour démontrer cette propriété de l'ellipse, reprenons la construction de celle-ci par la méthode du cercle directeur :

(Etant donné les deux foyers et la longueur du grand axe 2a, on considère le cercle de rayon 2a centré en F.

Soit P un point de ce cercle. On obtient un point P' de l'ellipse à l'intersection du segment [FP] avec la médiatrice de [F'P]. L'ellipse de foyers F et F' et de grand axe 2a est le lieu du point P' lorsque P parcourt le cercle.)



Observons les angles ainsi formés. Nous avons :

$\hat{P}'_1 = \hat{P}'_2$ (car m est médiatrice de PF')

$\hat{P}'_2 = \hat{P}'_3$ (angles opposés par le sommet)

$\Rightarrow \hat{P}'_1 = \hat{P}'_3$

Soit P'N la normale à m passant par P'

$\hat{P}'_3 + \hat{P}'_4 = \hat{P}'_1 + \hat{P}'_5 = 90°$

Comme nous avons démontré que $\hat{P}'_1 = \hat{P}'_3 \Rightarrow \hat{P}'_4 = \hat{P}'_5$

Ce qui revient à dire que l'angle formé par FP' avec la normale est égal à l'angle formé par F'P' avec cette normale ⇔ FP' est le rayon réfléchi de F'P'.

Ceci étant vrai quel que soit le point P' de l'ellipse.

Cette propriété est utilisée dans la confection de certains instruments optiques, mais aussi dans la construction des galeries à écho, ces structures à plafond elliptique dans lesquelles une personne qui chuchote en l'un des foyers peut être entendue à l'autre foyer. On peut visiter des exemples de galeries à écho à la Rotonde du Capitole à Washington D. C. et au tabernacle des Mormons à Salt Lake City.

L'histoire raconte que cette propriété intéressante de l'ellipse a mené à la construction de confessionnaux en forme ellipsoïdale. Ceux-ci étaient destinés à la confession de malades contagieux tels les lépreux, afin que le prêtre puisse entendre le malade sans s'en approcher. Il suffit en effet que le malade soit placé à l'un des foyers de l'ellipse tandis que le prêtre se place à l'autre foyer.

La propriété de réflexion des ellipsoïdes est utilisée en médecine moderne dans un appareil appelé lithotripteur, qui désintègre les calculs rénaux au moyen d'ondes de choc sous-marines à haute énergie. L'émetteur est situé en l'un des foyers de l'ellipse. Après avoir pris des mesures extrêmement précises, l'opérateur positionne le patient de telle sorte que le calcul se trouve en l'autre foyer de l'ellipse, et les ondes réfléchies peuvent ainsi briser les calculs rénaux sans toucher aux tissus voisins. En quelques minutes, le " bombardement d'ondes de choc " décompose les calculs en fragments qui sont ensuite évacués par voie urétrale. Le temps d'hospitalisation avec cette technique est ainsi nettement réduit. De plus les effets secondaires sont presque nuls.

3.15 Tangentes à l'ellipse.

Considérons ce problème à partir d'un exemple.

<u>Problème 1:</u> Soit à déterminer les équations des tangentes à l'ellipse $E \equiv \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$ ($\Leftrightarrow 25x^2 + 9y^2 = 225$) en ses points d'abscisse 2.

Nous avons $y = \pm\frac{5}{3}\sqrt{9-x^2} \Rightarrow y' = \mp\frac{5x}{3\sqrt{9-x^2}}$

si $x = 2 \Rightarrow y = \pm\frac{5}{3}\sqrt{5}$ et $y' = \mp 2\frac{\sqrt{5}}{3}$

Nous trouvons donc

$T_1 \equiv y - \frac{5}{3}\sqrt{5} = -2\frac{\sqrt{5}}{3}(x-2) \Rightarrow T_1 \equiv 3y + 2\sqrt{5}x - 9\sqrt{5} = 0$

$T_2 \equiv y + \frac{5}{3}\sqrt{5} = 2\frac{\sqrt{5}}{3}(x-2) \Rightarrow T_2 \equiv 3y - 2\sqrt{5}x + 9\sqrt{5} = 0$

<u>Problème 2 :</u>

Soit à déterminer les équations des tangentes à cette ellipse dont la pente vaut 2.
$d \equiv y = 2x + p$ et le problème consiste à déterminer la valeur de p pour que cette droite soit tangente à E ⇔ le système formé par l'équation de d et celle de E admet une seule solution.

$\begin{cases} y = 2x + p \\ 25x^2 + 9y^2 = 225 \end{cases} \Rightarrow 25x^2 + 9(2x+p)^2 = 225 \Leftrightarrow 25x^2 + 9(4x^2 + 4px + p^2) = 225$

$\Leftrightarrow 25x^2 + 36x^2 + 36px + 9p^2 = 225 \Leftrightarrow 61x^2 + 36px + 9p^2 - 225 = 0$

Or, cette équation du second degré, ne peut admettre qu'une seule solution, il faut donc que son réalisant s'annule $\Leftrightarrow (36p)^2 - 4 . 61 . (9p^2 - 225) = 1296p^2 - 2196p^2 + 54900 = 0$

$\Leftrightarrow 54900 - 900p^2 = 0 \Leftrightarrow p^2 = \frac{54900}{900} = 61$ et $p = \pm\sqrt{61} \cong \pm 7.8$

Deux droites de pente 2 sont donc tangentes à l'ellipse : il s'agit des droites d'équation : $y = 2x \pm 7.8$

3.16 Exercices.

1. Soit l'ellipse $E \equiv 25x^2 + 16y^2 = 100$
   Déterminez les équations des tangentes à l'ellipse
   a) en ses points d'abscisse 1
   b) en ses points d'abscisse 2
   c) parallèles à la droite $d \equiv 5x - 4y = 0$. Déterminez ensuite les points de contact.
2. $E \equiv 9x^2 + 16y^2 = 144$
   a) Déterminer les équations des tangentes à cette ellipse en ses points d'abscisses x = 1
   b) Déterminer la valeur de p pour que la droite $d \equiv y = 2x - p$ soit tangente à cette ellipse (et calculer les points de tangence.)
3. Déterminez l'équation de l'ellipse de sommets (6, -2) (-4, - 2) (1, -5) et (1, 1)
   Représentez cette ellipse et déterminez-en les foyers. Déterminez les équations des tangentes à cette ellipse en ses points d'abscisse 4.

4 L'hyperbole

4.1 Où rencontrer l'hyperbole ?

Dans les situations suivantes, on obtient des courbes qui semblent être de même nature. Cela est-il vraiment le cas ?

1. On considère le lieu des points dont la différence des distances à deux points fixes est constante. Ce lieu, construit point par point comme intersections de cercles (cfr point 5.2) est constitué de deux courbes symétriques.
2. On dispose d'une plaque plane et d'une lampe halogène. Si on regarde l'ombre d'une balle sphérique sur la plaque lorsque la distance de la lampe à la plaque est plus petite que la distance du sommet de la sphère à la plaque, on observe une courbe ouverte comme dans le cas précédent.
3. On considère la section plane d'un cône par un plan qui coupe les deux nappes du cône. On obtient une courbe ouverte et composée de deux branches
4. On considère la courbe d'équation $y = \frac{1}{x}$ appelée hyperbole équilatère.
5. On dessine un disque sur une feuille de papier en marquant bien son centre. On choisit ensuite un point A à l'extérieur du disque et on répète un grand nombre de fois la manœuvre suivante : ramener le point A sur un point du bord du disque et marquer la pliure. Tous les plis ainsi obtenus forment l'enveloppe d'une courbe. (Remarquons que les consignes de pliage sont semblables à celles données pour obtenir une ellipse mais, cette fois, le point choisi se trouve à l'extérieur du disque.)

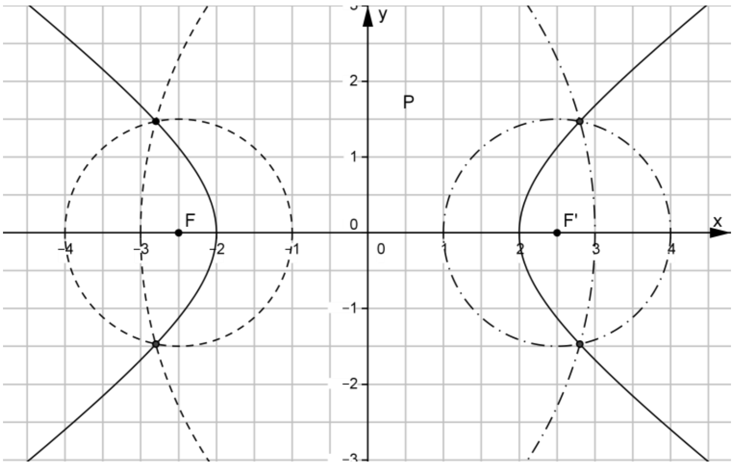
4.2 Définition

L'hyperbole est le lieu des points dont la différence des distances à 2 points fixes est une constante (strictement inférieure à la distance entre les 2 points).

Ces deux points sont appelés foyers de l'hyperbole et sont notés F et F '
La distance entre les 2 foyers est appelée distance focale et est notée 2c
La différence des distances d'un point de l'hyperbole aux foyers est notée 2a
Nous avons donc $P \in H \Leftrightarrow d(F,P) - d(F', P) = 2a$ ou $d(F', P) - d(F,P) = 2a \Leftrightarrow |d(F,PP) - d(F',P)| = 2a$
Il faut donc $2a < 2c \Rightarrow a < c$

4.3 Méthode construction

La méthode de construction d'une hyperbole est semblable à celle employée pour l'ellipse et consiste à déterminer des points de l'hyperbole à l'intersection de 2 cercles.



Considérons l'exemple 2a = 4 ; 2c = 5
Nous cherchons un point P tel que
d (F,P) - d (F', P) = 2a
Si d (F', P) = 1.5 cm alors, il faut que
d(F, P) = d (F ', P) + 2a =1.5 + 4 = 5.5 cm
et P se trouve donc à l'intersection des cercles C(F, 1.5) et C' (F', 5.5)
En général : à l'intersection des cercles
C(F, r) et C ' (F ', 2a + r)
Et C(F, r + 2a) et C ' (F ', r)

Remarque :
Il faut que le rayon r ait une valeur minimale (afin que les cercles se coupent):
r min si r + 2a + r = 2c ⇒ 2r = 2c - 2a ⇒ r min = c - a
Mais il n'y a pas de valeur maximale: P peut être aussi éloigné des foyers que l'on veut

4.4 Construction dynamique avec Géogébra.

- Tracer une demi-droite [AB
- Placer un point C sur cette demi-droite au-delà de B
- Tracer un segment [DE] de longueur supérieure à |AB|
- R1 = distance [A,C] et R2 = distance [B,C]
- Tracer les cercles de centre D et de rayon R1 et de centre E et de rayon R2
- Utiliser l'outil "intersection entre 2 objets" entre ces cercles et activer la trace des ces points.
- Recommencer la même opération avec les cercles de centre D et de rayon R2 et de centre E et de rayon R1.
- Déplacer le point C sur la demi-droite au-delà de B (ou utiliser l'outil lieu des points d'intersection lorsque C se déplace.

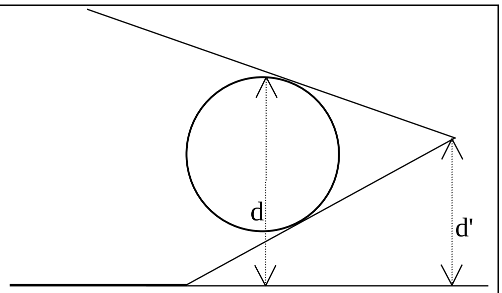
Visualisation de la méthode : http://www.geogebratube.org/material/show/id/43483

4.5 Vérification des situations proposées au point 4.1

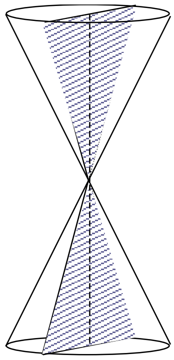
Le point 5.1.1 nous a servi de définition de l'hyperbole, nous allons donc vérifier que les autres situations donnent également des hyperboles.

4.5.1 L'ombre de la balle sphérique par une lampe halogène.

La figure ci-contre, représente en coupe, la balle, la plaque et la lampe lorsque d > d'. L'ombre peut être assimilée à une section plane d'une nappe d'un cône: celle des rayons lumineux qui glissent sur la sphère pour former un cône de lumière. Nous retrouvons donc une des branches de la section du cône à deux nappes étudiée au point suivant.



4.5.2 Section par un plan d'un cône à deux nappes.

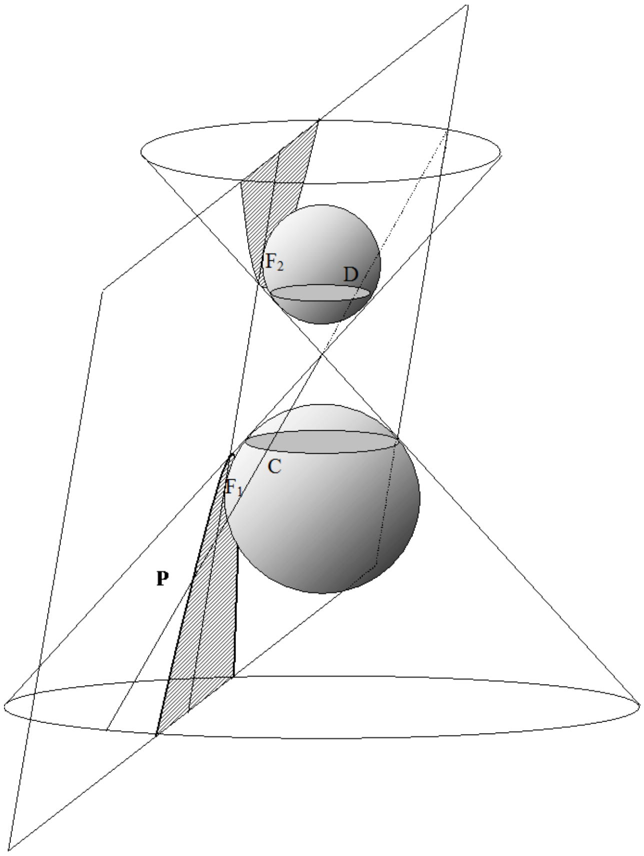


Jusqu'à présent, nous avons toujours employé la première notion de cône : le solide "chapeau pointu" éventuellement prolongé dans le cas des cônes de lumière.
Mais on peut également considérer la "surface conique circulaire" engendrée par le mouvement de rotation autour d'une droite fixe (axe), d'une autre droite qui lui est sécante, en conservant pendant ce mouvement l'angle entre les deux droites. Cette surface est formée de deux nappes, chacune infinie. La figure ci-contre représente un tel cône avec ses sections par un plan comprenant l'axe du cône.

Théorème de Dandelin et Quételet (2ème partie)

La section d'un cône à deux nappes (infini) avec un plan non parallèle à une génératrice et ne coupant pas toutes les génératrices d'une nappe est une hyperbole.

La démonstration ci-dessous est donnée pour information.



Le schéma ci-contre illustre la situation.
Nous allons montrer que la section obtenue est une courbe qui vérifie la condition : "la différence des distances d'un point de la courbe à deux points fixes est une constante.

Considérons les deux sphères inscrites dans le cône (une dans chaque nappe) et tangentes au plan de section. Ces sphères sont tangentes au cône suivant deux cercles et tangentes au plan de section en deux points F_1 et F_2

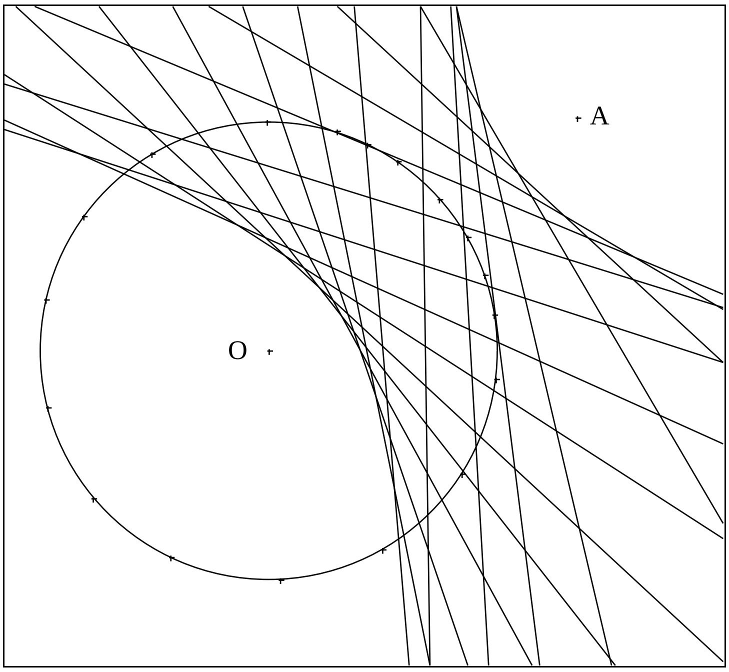
Soit P un point quelconque de la courbe. Il se trouve sur une génératrice qui rencontre les cercles de contact des sphères en deux points C et D. Or deux tangentes à une sphère issues d'un même point et limitées au point de contact sont égales
$\Rightarrow | PF_1 | = | PC |$ et $| PF_2 | = | PD |$

$\Rightarrow | PF_2 | - | PF_1 | = | PD | - | PC | = | DC |$

Or : $| DC |$ = constante (car génératrice du cône à deux nappes limitée par les deux cercles de contact).

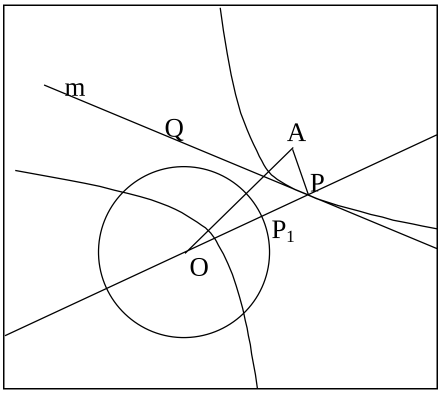
$\Rightarrow$ tout point P de la section est donc tel que la différence de ses distances aux points F_1 et F_2 est une constante : P appartient bien à une hyperbole de foyers F_1 et F_2

4.5.3 Le pliage de la feuille de papier.



Reprenons l'énoncé du problème. On dessine un disque sur une feuille de papier en marquant bien son centre. On choisit ensuite un point A à l'extérieur du disque et on répète un grand nombre de fois la manœuvre suivante : ramener le point A sur un point du bord du disque et marquer la pliure. Tous les plis ainsi obtenus forment l'enveloppe d'une courbe.

Sur le schéma ci-contre, les plis sont imités par les médiatrices des segments reliant le point A aux différents points du cercle. La courbe qui a pour enveloppe ces médiatrices a bien deux branches. Elle semble être une hyperbole dont les foyers sont O et A. Il nous reste à le justifier.



Le second schéma reprend une des médiatrices ainsi que la courbe obtenue. Nous observons que la médiatrice est tangente à la courbe. Prouvons-le.

Soit P_1, un point du cercle, m la médiatrice du segment $[AP_1]$

et $\{P\} = m \cap OP_1$

Nous avons : $| OP | - | AP | = | OP | - |P_1P| = | OP_1 | = r$ (constante) $\Rightarrow P \in$ lieu des points dont la différence des distances aux points O et A vaut la constante r.

Il reste donc à montrer que $\forall\ Q \in m, Q \neq P \Leftrightarrow Q$ ne vérifie pas la propriété de l'hyperbole.

$Q \in m \Rightarrow | QP_1 | = | QA |$

$\Rightarrow | QO | - | QA | = | QO | - | QP_1 | < | OP_1 |$ (car dans tout triangle la différence de deux côtés est strictement inférieure au troisième côté du triangle : ici dans le triangle OQP_1)

4.6 Nouvelle méthode de construction de l'hyperbole : le cercle directeur.

La situation précédente nous suggère une nouvelle méthode de construction de l'hyperbole de foyers F_1 et F_2 d'axe = 2a. Il suffit de reprendre la figure précédente avec une nouvelle dénomination des points et suivre les étapes :

- Tracer le cercle de rayon 2a centré en F_1 et choisir un point P_1 quelconque de ce cercle.
- Construire m, la médiatrice de $[P_1F_2]$
- Soit $P = m \cap F_1P_1$

Le lieu du point P lorsque P_1 parcourt le cercle est l'hyperbole de foyers F_1 et F_2 est telle que la différence des distances d'un point de cette hyperbole aux foyers est une constante égale à 2a.

4.7 Construction dynamique : utilisation de géogébra

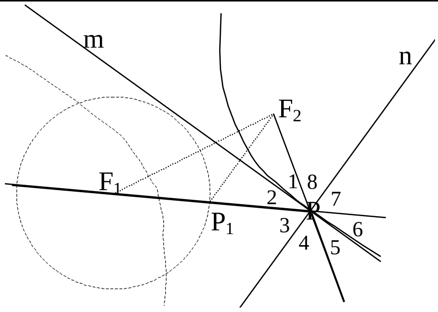
Il s'agit de la même construction que celle de l'ellipse mais le point C est extérieur au cercle

- Tracer un segment [AB] (longueur de [AB] = longueur du grand axe de l'ellipse)
- Placer un point C sur ce segment
- Tracer autre segment [DE] tel que $\overline{DE} < \overline{AB}$ ($\overline{DE}$ = la distance focale)
- Tracer les cercles de centre D et de rayon = distance [A,C] et de centre E et rayon = distance [C,B]
- Utiliser l'outil "points sur 2 objets" : les deux cercles
- Activer la trace de ces points et déplacer le point C sur le segment [A,B] (ou utiliser l'outil "lieu" des points d'intersection lorsque C parcourt le segment [A,B]
- Facultatif : *menu « éditer », « propriétés » : renommer les foyers F et F' par exemple.*

Visualisation de la méthode : http://www.geogebratube.org/material/show/id/43485

4.8 Propriété de réflexion de l'hyperbole.

Tout rayon incident issu du foyer F_1 d'une hyperbole se réfléchit dans la direction du foyer F_2.



Reprenons la construction de l'hyperbole par la méthode du cercle directeur décrite ci-dessus.

Soit un rayon incident F_1P formant un angle $\hat{P}_3$ avec la normale n

Nous avons : $\hat{P}_1 = \hat{P}_2$ (car m est médiatrice de $[P_1F_2]$)

$\hat{P}_1 = \hat{P}_5$ et $\hat{P}_2 = \hat{P}_6$ (angles opposés par le sommet)

$\Rightarrow \hat{P}_2 = \hat{P}_5 \Rightarrow \hat{P}_3 = \hat{P}_4$ (complémentaires d'angles égaux)

Or, l'angle $\hat{P}_3$ formé par F_1P et la normale est l'angle d'incidence

L'angle $\hat{P}_4$ qui lui est égal est formé par la normale et F_2P : c'est donc l'angle de réflexion et le rayon incident F_1P est bien réfléchi dans la direction du foyer F_2.

4.9 Equation cartésienne de l'Hyperbole.

Il nous reste à montrer que la courbe d'équation $y = \frac{1}{x}$ est bien une hyperbole au sens où nous l'avons définie.

Pour cela, nous allons d'abord établir la condition à vérifier par les coordonnées des points d'une hyperbole et ensuite montrer que les points de la courbe $y = \frac{1}{x}$ vérifient une telle condition lorsqu'on leur fait subir une rotation de 45°.

Recherchons donc l'équation de l'hyperbole de foyers F(-c, 0) et F' (c, 0) et telle que la différence des distances d'un point quelconque de cette hyperbole à ces foyers vaut 2a $\Leftrightarrow$ d (P,F) - d (P,F ') = ± 2a

$\Leftrightarrow \sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2} = \pm 2a \Leftrightarrow \sqrt{(x+c)^2+y^2} = \sqrt{(x-c)^2+y^2} \pm 2a$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right)^2 = \left(\sqrt{(x-c)^2+y^2} \pm 2a\right)^2 \Leftrightarrow (x+c)^2 + y^2 = 4a^2 + (x-c)^2 + y^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$

$\Leftrightarrow x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 + x^2 - 2cx + c^2 + y^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} \Leftrightarrow 4cx - 4a^2 = \pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$

$\Leftrightarrow cx - a^2 = \pm a\sqrt{(x-c)^2+y^2} \Leftrightarrow c^2x^2 + a^4 - 2a^2cx = a^2(x^2 + c^2 - 2cx + y^2)$

$\Leftrightarrow c^2x^2 + a^4 - 2a^2cx = a^2x^2 + a^2c^2 - 2a^2cx + a^2y^2 \Leftrightarrow (c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2c^2 - a^4$

$\Leftrightarrow (c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2) \Leftrightarrow b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ en posant $b^2 = c^2 - a^2$ ($c^2 - a^2 > 0$)

Et nous obtenons l'équation de base de l'hyperbole.: $\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$

4.10 Terminologie

Le *centre* de l'hyperbole est le milieu du segment [FF ']

L'axe focal est la droite FF'.

L'axe non focal est la médiatrice de [FF']

Les *sommets* de l'hyperbole sont les intersections de l'axe focal avec l'hyperbole : S_1 (a,0) et S_2 (-a, 0)

La *longueur de l'axe focal* est la distance entre les 2 foyers : d (F,F') = 2c

les axes de l'hyperbole en sont des axes de symétrie. Le centre est un centre de symétrie.

4.11 Remarque

Si les foyers sont sur l'axe des y et ont pour coordonnées : F (0,c) et F ' (0, - c), et que la valeur fixe de la différence des distances d'un point de l'hyperbole aux deux foyers vaut 2b, alors l'équation devient $\boxed{\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1}$

avec $c^2 - b^2 = a^2$

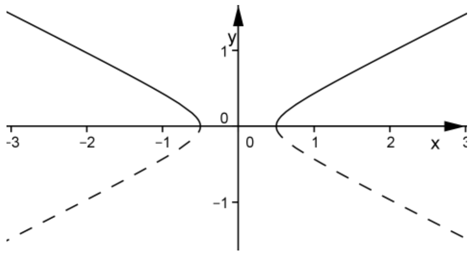
En pratique : la variable dont le coefficient est positif donne l'axe focal

4.12 Exercices.

1. Déterminez l'équation d'une hyperbole centrée en (0, 0) dont un des sommets a pour coordonnée (5, 0) et un foyer F(6, 0)
2. Déterminer l'axe focal et les coordonnées des foyers des hyperboles suivantes :

   a) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$ b) $9x^2 - 4y^2 - 6 = 0$ c) $y^2 - 3x^2 = -5$

4.13 Détermination des asymptotes



Soit $H \equiv \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

Pour déterminer les asymptotes de cette hyperbole, nous reprendrons son expression sous forme de fonctions.

$H \equiv \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} - 1$

$\Rightarrow y^2 = b^2\left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right) = \frac{b^2}{a^2}\,(x^2 - a^2) \Rightarrow y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$

Nous avons ainsi associé deux fonctions à cette hyperbole :

$f_1(x) = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ et $f_2(x) = -\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$

Dans le graphique ci-contre, (de $H \equiv 4x^2 - 16y^2 = 1$) le graphe de f_1 est en trait plein et celui de f_2 en pointillés. Déterminons les éventuelles asymptotes obliques de ces deux graphes.
Considérons d'abord la fonction $f_1(x)$:

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f_1(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}}{x} = \frac{b}{a} \lim_{x \to +\infty} \frac{|x|}{x} = \frac{b}{a}$$

$$p = \lim_{x \to +\infty} (f_1(x) - mx) = \lim_{x \to +\infty}\left(\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{b}{a}x\right)$$ qui nous amène à un cas d'indétermination.

$$p = \frac{b}{a} \lim_{x \to +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - a^2} - x)(\sqrt{x^2 - a^2} + x)}{\sqrt{x^2 - a^2} + x} = \frac{b}{a} \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - a^2 - x^2}{\sqrt{x^2 - a^2} + x} = \frac{b}{a} \lim_{x \to +\infty} \frac{-a^2}{\sqrt{x^2 - a^2} + x} = 0$$

$\Rightarrow f_1$ admet une asymptote oblique en $+\infty$ d'équation : $y = \frac{b}{a}x$

Par un calcul similaire, on obtient l'asymptote de f_1 en $-\infty$: $y = -\frac{b}{a}x$

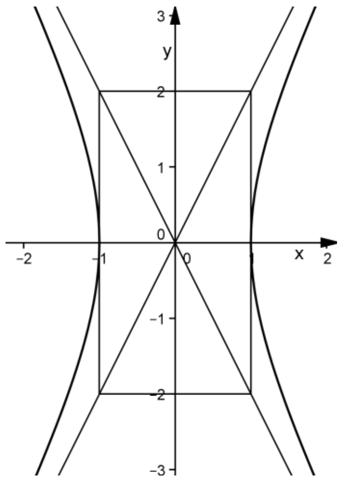
et de même pour le graphe de f_2

Conclusion : Une hyperbole $H \equiv \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ admet 2 asymptotes obliques

en $\pm\infty$: $y = \pm\frac{b}{a}x$

Pour une hyperbole $H' \equiv \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$, les conclusions sont les mêmes.

H et H' sont appelées *hyperboles conjuguées*.



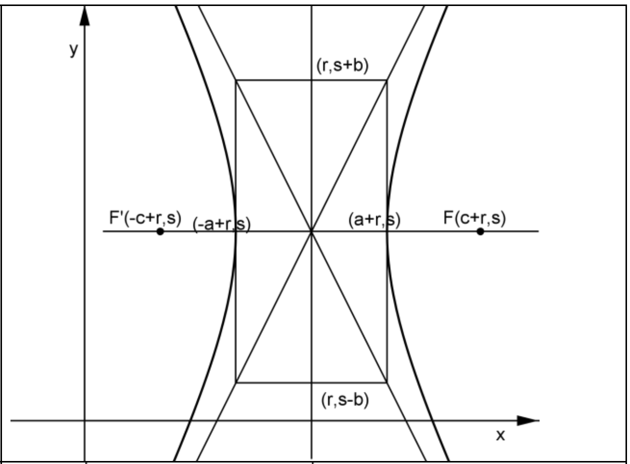
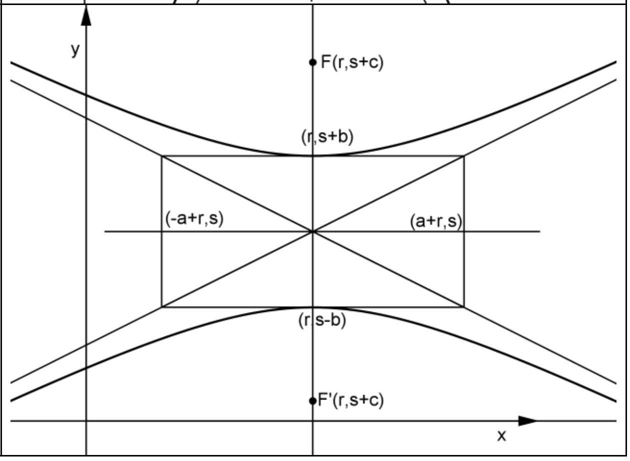
Cette propriété de l'hyperbole nous donne une méthode de construction rapide de celle-ci :

- Tracer le rectangle de sommets (a,b) , (a,-b) , (-a,-b) et (-a, b). Les diagonales de ce rectangle sont les asymptotes de l'hyperbole.
- Les points (-a,0) et (a,0) sont les sommets de H.
- On obtient les foyers par les intersections d'un arc de cercle de centre 0 et de rayon égal à la demi - diagonale du rectangle précédent avec l'axe des x. En effet, en appliquant le théorème de Pythagore on constate aisément que cette demi - diagonale a pour longueur $\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{c^2} = c$

Pour H' (hyperbole conjuguée), le rectangle de construction sera le même. Les sommets seront les points (0, b) et (0, -b). Et les foyers sont obtenus par intersection du même arc de cercle que pour H mais avec l'axe des y.

4.14 Hyperbole non centrée à l'origine.

Par un raisonnement analogue à celui tenu pour la parabole et l'ellipse, nous obtenons l'équation d'une hyperbole centrée au point (r,s)

<table>
<tr>
<td>Une hyperbole d'axe focal horizontal :
$H \equiv \frac{(x-r)^2}{a^2} - \frac{(y-s)^2}{b^2} = 1$
$b^2 = c^2 - a^2$
Les coordonnées des sommets et des foyers sont données dans le graphique ci-contre.
Les asymptotes ont pour équations :
$y - s = \pm \frac{b}{a}(x - r)$</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Pour un axe focal vertical :
$H \equiv \frac{(y-s)^2}{b^2} - \frac{(x-r)^2}{a^2} = 1$
$b^2 = c^2 - a^2$
Les coordonnées des sommets et des foyers sont données dans le graphique ci-contre.
Les asymptotes ont pour équations :
$y - s = \pm \frac{b}{a}(x - r)$</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

4.15 Hyperbole équilatère

Une hyperbole équilatère est une hyperbole dont les asymptotes sont perpendiculaires $\Rightarrow$ le rectangle de construction est un carré : a = b

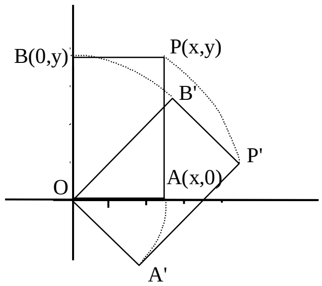
Dans ce cas : $b^2 = c^2 - a^2 \Rightarrow a^2 = c^2 - a^2 \Rightarrow 2a^2 = c^2 \Rightarrow c = \sqrt{2}\,a$

4.16 *L'hyperbole $y = \frac{1}{x}$*

Lorsqu'on dessine la courbe $y = \frac{1}{x}$ on l'appelle hyperbole équilatère. Nous allons maintenant prouver qu'il s'agit bien d'une hyperbole au sens où nous l'avons définie dans ce chapitre et déterminer ses caractéristiques.

En observant le graphe de la courbe $y = \frac{1}{x}$, nous pouvons directement affirmer que s'il s'agit bien d'une hyperbole, alors ses foyers sont sur la droite y = x.

Appliquons une rotation de - 45° autour de l'origine, de sorte que les axes de symétrie (y = x et y = -x) de la courbe soient confondus avec les axes ox et oy. On vérifiera alors que l'équation de la courbe après rotation est de la forme $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$



Soit un point P(x , y) Cherchons son image par une rotation du plan de – 45° autour de l'origine

Sachant que la rotation conserve les distances,

L'image du point O (0 , 0) est lui-même

L'image du point (1 , 0) est le point $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

L'image du point A (x , 0) est le point A' $\left(x\frac{\sqrt{2}}{2}, -x\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

L'image du point (0 , 1) est le point $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

L'image du point B (0 , y) est le point B' $\left(y\frac{\sqrt{2}}{2}, y\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Considérons maintenant le rectangle de sommet A (x , 0) O (0 , 0) B (0 ,y) P(x , y)

Son image par la rotation est le rectangle A'OB'P'

Nous connaissons les coordonnées des sommets A' et B'.

Sachant que la figure OB'P'A' est un rectangle, pour déterminer celle de P', nous utilisons la relation de Chasles :

$\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{B'P'} = \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OA'}$

En prenant les coordonnées de ces vecteurs, nous obtenons :

$(x', y') = \left(x\frac{\sqrt{2}}{2} + y\frac{\sqrt{2}}{2}, -x\frac{\sqrt{2}}{2} + y\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ou encore : $\begin{cases} x' = x\frac{\sqrt{2}}{2} + y\frac{\sqrt{2}}{2} \\ y' = -x\frac{\sqrt{2}}{2} + y\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

Pour obtenir l'équation de la courbe image après rotation, il faut plutôt exprimer x et y en fonction de x' et y' (nouvelles coordonnées). En considérant les égalités ci-dessus comme un système d'équations aux deux inconnues x et y, on obtient : $\begin{cases} x = x'\frac{\sqrt{2}}{2} - y'\frac{\sqrt{2}}{2} \\ y = x'\frac{\sqrt{2}}{2} + y'\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

Reprenons maintenant l'équation $y = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x\,y = 1 \Leftrightarrow \left(x'\frac{\sqrt{2}}{2} - y'\frac{\sqrt{2}}{2}\right).\left(x'\frac{\sqrt{2}}{2} + y'\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{x'^2}{2} - \frac{y'^2}{2} = 1$

Cette dernière équation est bien celle d'une hyperbole équilatère dont les foyers sont en (2 , 0) et (- 2 , 0)

4.17 Exercices

1. Construire les courbes suivantes. Déterminer les coordonnées des sommets, des foyers et les équations des asymptotes.
   a) $9x^2 - 16y^2 = 144$
   b) $25\,x^2 - 16y^2 = 121$
   c) $9x^2 - 4y^2 - 6x + 8y - 39 = 0$
   d) $4x^2 - 9y^2 + 36 = 0$
   e) $9x^2 - 16y^2 - 18x - 64y + 89 = 0$
2. Déterminer l'équation de l'hyperbole H centrée à l'origine, dont un sommet a pour coordonnée (0, 3) et une asymptote a pour équation $2x - y = 0$
3. Déterminez l'équation d'une hyperbole centrée en (0, 0) dont un des sommets est S(0, -2) et une asymptote oblique a pour équation : $x - 3y = 0$
4. Déterminez l'équation de l'hyperbole centrée en (0, 0) de foyer F(13, 0) et dont une des asymptotes est la droite $d \equiv 5x - 12y = 0$
5. Construire la courbe d'équation $9x^2 - 16y^2 - 18x + 64y + 89 = 0$
6. Déterminez l'équation de l'hyperbole centrée en (1, 2) de foyer F(7, 2) et de sommet (5, 2)
   Déterminez les équations des asymptotes.
7. Déterminez l'équation de l'hyperbole centrée en (0, 0) de sommet S(0, -5) et de foyer (0, 13)
8. Construire la courbe d'équation $4x^2 - 9y^2 + 12x - 6y - 28 = 0$
9. Déterminer l'équation de l'hyperbole centrée en (-1, 3) de S (-1, 1) et de distance focale = 12
   Déterminez les équations de ses asymptotes.
10. Déterminer l'équation de la tangente et de la normale (= perpendiculaire à la tangente) à l'hyperbole $H \equiv 9x^2 - 16y^2 + 144 = 0$ en son point d'abscisse 3 et d'ordonnée positive.
11. Déterminez l'équation de l'hyperbole H d'asymptote $A \equiv 4y = \pm 3(x + 3) + 4$, de distance focale 20 et d'axe focal parallèle à l'axe des abscisses.
    Représentez cette hyperbole.
    Déterminer les équations des tangentes à H en ses points d'abscisse 9.

5 Solutions des exercices.

5.1 Le cercle (N° 2.3)

1. $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 25$
2. $(x - 1)^2 + (y - 4)^2 = 13$
3. a) Centre : (-1, 3) $r = \sqrt{10}$
   b) Centre : $(\frac{3}{2}, -4)$ $r = \frac{\sqrt{273}}{2}$
   c) ce n'est pas un cercle car : $p^2 + q^2 - 4k = 1 + 1 - 12 < 0$
   d) ce n'est pas un cercle car les coefficients de x^2 et de y^2 ne sont pas égaux
4. $x^2 + (y - 2)^2 = 36/5$

5. y= $\sqrt{3}$ x ± 12
6. m = $\frac{1}{3}$ et dans ce cas le centre du cercle est le point $\left(\frac{3}{4};-\frac{1}{2}\right)$ et son rayon = $\frac{\sqrt{5}}{4}$
7. d ≡ 2x – 5y + 19 = 0
8. a) k < 5 b) k = - 35 c) k = -11 d) k = 1 e) k = 0.5
9. a) $(x - 3.5)^2 + (y + 0.5)^2 = 12.5$

   b) $\left(x-\frac{8}{3}\right)^2+\left(y-\frac{2}{3}\right)^2=\frac{50}{9}$

   N.B. : équations des médiatrices : de AB : x + 2y = 4 de BC : x – y = 2 de AC : 2x + y = 6

5.2 L'ellipse

5.2.1 Solutions du N° 3.8

1. a) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$ b) $2x^2 + 6y^2 = 1$

   Si foyers ∈ à l'axe des y ⇒ a) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{13}=1$ b) $10x^2 + 6y^2= 5$

2.

	Foyers	Sommets	distance focale	grand axe	petit axe
E_1	(± 3, 0)	(± 5, 0) et (0, ±4)	6	10	8
E_2	(0, ±4)	(0, ±5) et (± 3, 0)	8	10	6
E_3	(0, ±1)	(0, ± $\sqrt{1.5}$) et (± $\sqrt{0.5}$, 0)	2	2 $\sqrt{1.5}$	2 $\sqrt{0.5}$
E_4	(0, ± 1.5)	(0, ±2.5) et (± 2, 0)	3	5	4
E_5	(0, ± $\sqrt{\frac{5}{6}}$)	(0, ± $\sqrt{\frac{3}{2}}$) et (± $\sqrt{\frac{2}{3}}$,0)	2 $\sqrt{\frac{5}{6}}$	2 $\sqrt{\frac{3}{2}}$	2 $\sqrt{\frac{2}{3}}$
E_6	(± $\sqrt{11}$, 0)	(± $\sqrt{15}$, 0) et (0, ±2)	2 $\sqrt{11}$	2 $\sqrt{15}$	4

3. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{41}=1$
4. a) $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{81}=1$ b) $\frac{x^2}{28}+\frac{y^2}{64}=1$ c) $\frac{63x^2}{64}+\frac{y^2}{256}=1$ d) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$

   e) $\frac{2x^2}{-3+3\sqrt{65}}+\frac{2y^2}{29+3\sqrt{65}}=1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{10.593}+\frac{y^2}{26.593}=1$

5.2.2 Solutions du N° 3.12

1) $\frac{(x-0.5)^2}{16}+\frac{(y+1)^2}{7}=1$ 2) $\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{4(y+5)^2}{81}=1$

3) $\frac{(x+2)^2}{4}+\frac{(y-0.5)^2}{13}=1$ 4) $\frac{(x+1)^2}{36}+\frac{(y-\frac{2}{3})^2}{11}=1$

5)

	Centre	Foyers	Sommets
$E_1 \equiv \frac{(x-3)^2}{16}+\frac{(y-2)^2}{4}=1$	(3, 2)	(3 ± 2 $\sqrt{3}$, 2)	(-1, 2) (7,2) (3, 0) (3, 4)
$E_2 \equiv \frac{(x+\frac{3}{2})^2}{9}+\frac{(y-\frac{1}{3})^2}{4}=1$	$\left(-\frac{3}{2},\frac{1}{3}\right)$	$\left(-\frac{3}{2}\pm\sqrt{5},\frac{1}{3}\right)$	$\left(\frac{3}{2},\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{9}{2},\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{3}{2},\frac{7}{3}\right)\left(-\frac{3}{2},-\frac{5}{3}\right)$
$E_3 \equiv \frac{9(x-1)^2}{16}+(y+2)^2=1$	(1, - 2)	$\left(1\pm\frac{\sqrt{7}}{3},-2\right)$	(- $\frac{1}{3}$, -2) ($\frac{7}{3}$, -2) (1, - 1) (1, - 3)
$E_4 \equiv \frac{(x-\frac{1}{3})^2}{4}+\frac{(y-\frac{3}{2})^2}{9}=1$	$\left(\frac{1}{3},\frac{3}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{3},\frac{3}{2}\pm\sqrt{5}\right)$	$\left(-\frac{5}{3},\frac{3}{2}\right)\left(\frac{7}{3},\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{3},\frac{9}{2}\right)\left(\frac{1}{3},-\frac{3}{2}\right)$

5.2.3 Solutions du N° 3.15

1. a) $t_1 \ni (1, \frac{5}{4}\sqrt{3})$ et sa pente = $\frac{-5}{4\sqrt{3}}$ $\Rightarrow t_1 \equiv 4\sqrt{3}\,y + 5x - 20 = 0$

   $t_2 \ni (1, -\frac{5}{4}\sqrt{3})$ et sa pente = $\frac{5}{4\sqrt{3}}$ $\Rightarrow t_2 \equiv 4\sqrt{3}\,y - 5x + 20 = 0$

   b) $t \ni (2, 0) \Rightarrow t \equiv x = 2$

   c) $t_1 \equiv y = \frac{5}{4}\,x + \frac{5}{\sqrt{2}}$ point de contact : $\left(-\sqrt{2}, \frac{5\sqrt{2}}{4}\right)$

   et $t_2 \equiv y = \frac{5}{4}\,x - \frac{5}{\sqrt{2}}$ point de contact : $\left(\sqrt{2}, -\frac{5\sqrt{2}}{4}\right)$

2. a) $t_1 \ni \left(1, \frac{3\sqrt{15}}{4}\right)$ et $t_1 \equiv y = \frac{-3}{4\sqrt{15}}\,x + \frac{12}{\sqrt{15}}$ $t_2 \ni \left(1, -\frac{3\sqrt{15}}{4}\right)$ et $t_2 \equiv y = \frac{3}{4\sqrt{15}}\,x - \frac{12}{\sqrt{15}}$

   b) $p = \pm\sqrt{73} \Rightarrow t_1 \equiv y = 2x + \sqrt{73}$ et $t_2 \equiv y = 2x - \sqrt{73}$

   Points de contact : avec t_1: $\left(-\frac{32}{\sqrt{73}}, \frac{-9}{\sqrt{73}}\right) \cong (-3.74 ; -1.05)$ avec t_2 : $\left(\frac{32}{\sqrt{73}}, \frac{9}{\sqrt{73}}\right)$

3. $\frac{(x-1)^2}{25} + \frac{(y+2)^2}{9} = 1$ Tangente en (4, 0.4) : $t_1 \equiv 20y + 9x - 44 = 0$

   Tangente en (4, -4.4) : $t_2 \equiv 20y - 9x + 124 = 0$

5.3 L'hyperbole

5.3.1 Solutions du N° 4.12

1. $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{11} = 1$
2. a) axe focal : axe des x $F(\sqrt{41}, 0)$ $F'(-\sqrt{41}, 0)$

   b) axe focal : axe des x $F\left(\pm\sqrt{\frac{13}{6}}, 0\right)$

   c) axe focal : axe des x $F\left(\pm\sqrt{\frac{20}{3}}, 0\right)$

5.3.2 Solutions du N° 4.17

1.

Foyers	Sommets	Asymptotes	Hyperbole
$(\pm 5, 0)$	$(\pm 4, 0)$	$y = \pm\frac{3}{4}x$	
$(\pm\frac{11}{20}\sqrt{41}, 0)$	$(\pm\frac{11}{5}, 0)$	$y = \pm\frac{5}{4}x$	
$(\pm\sqrt{13} + \frac{1}{3}, 1)$	$(\pm 2 + \frac{1}{3}, 1)$	$y - 1 = \pm\frac{3}{2}(x - \frac{1}{3})$	$\frac{(x-\frac{1}{3})^2}{4} - \frac{(y-1)^2}{9} = 1$
$(0, \pm\sqrt{13})$	$(0, \pm 2)$	$y = \pm\frac{2}{3}x$	
(1, -7) et (1, 3)	(1, 1) et (1, -5)	$y + 2 = \pm\frac{3}{4}(x - 1)$	$\frac{(y+2)^2}{9} - \frac{(x-1)^2}{16} = 1$

2. $\frac{y^2}{9} - \frac{4x^2}{9} = 1$
3. $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{36} = 1$
4. $\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{25} = 1$

5. $\frac{(y-2)^2}{9}-\frac{(x-1)^2}{16}=1$ C (1, 2) F (1, 2 ± 5) S (1, 2 ± 3) As : $y-2=\pm\frac{3}{4}(x-1)$

6. $\frac{(x-1)^2}{16}-\frac{(y-2)^2}{20}=1$ As : $y-2=\pm\frac{\sqrt{5}}{2}(x-1)$

7. $\frac{y^2}{25}-\frac{x^2}{144}=1$

8. $\frac{(x+\frac{3}{2})^2}{9}-\frac{(y+\frac{1}{3})^2}{4}=1$ $C(-\frac{3}{2},-\frac{1}{3})$ $F(-\frac{3}{2}\pm\sqrt{13},-\frac{1}{3})$ $S(-\frac{3}{2}\pm 3,-\frac{1}{3})$

As : $y+\frac{1}{3}=\pm\frac{2}{3}(x+\frac{3}{2})$

9. $\frac{(y-3)^2}{4}-\frac{(x+1)^2}{32}=1$ AS : $y-3=\pm\frac{\sqrt{2}}{4}(x+1)$

10. t ∋ $(3, \frac{15}{4})$ y ' en ce point : $\frac{9}{20}$ $\Rightarrow t \equiv 20y-9x-48=0$

n ∋ $(3, \frac{15}{4})$ et pente = $-\frac{20}{9}$ $\Rightarrow n \equiv 9y+20x-\frac{375}{4}=0$

11. $\frac{(x+3)^2}{64}-\frac{(y-1)^2}{36}=1$ $t_1 \equiv 20y-9\sqrt{5}\,x-20+21\sqrt{5}=0$ et $t_2 \equiv 20y+9\sqrt{5}\,x-20-21\sqrt{5}=0$